



Ecole de Gestion

Modélisation des taux de mortalité et utilisation d'instruments financiers dérivés pour la couverture du risque de longévité

par Sullivan Giannini

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de Maîtrise en Finance - Maître ès science (M.Sc.)

Ce mémoire est présenté à :

Alain Bélanger (directeur)

Guy Bellemare

Christian Robert

Août 2020

© Sullivan Giannini, 2020

Résumé

Ce mémoire porte sur le risque de longévité et sur l'utilisation de différents instruments financiers dérivés qui permettraient aux compagnies d'assurance et aux régimes de retraite à prestations déterminées de se couvrir. Le risque de longévité peut être défini comme le risque que les populations de rentiers vivent plus longtemps qu'anticipé. Cette incertitude quant à l'évolution de la durée de vie des populations d'assurés entraîne des risques financiers conséquents pour de nombreux acteurs économiques. Pour les individus, le risque de longévité représente le risque d'épuiser leurs ressources financières, entraînant une baisse de leur qualité de vie ou un retour forcé sur le marché du travail. Pour les institutions qui offrent des couvertures pour garantir les revenus des retraités, le risque de longévité est le risque de sous-estimer les taux de survie, entraînant une augmentation des engagements permettant de couvrir suffisamment les promesses futures de paiement.

Bien que plusieurs obligations de longévité aient déjà été introduites sur le marché sans toutefois être un succès, cette initiative a ouvert la voie à plusieurs réflexions, dont celle de développer un marché de produits financiers dérivés pour se couvrir contre le risque de longévité. Cette étude s'inspire de deux produits existant dans le marché des produits dérivés et qui servent principalement à protéger des portefeuilles d'actions ou d'obligations : les forwards et les options. L'efficacité de la couverture sera évaluée sur des portefeuilles unicohortes et multicohortes (plus réaliste) et avec des instruments dont les sous-jacents sont les taux de survie, les taux de mortalité et également les paramètres k du modèle de prédiction des taux de Cairns et al. [6].

Que ce soit avec un portefeuille unicohorte ou un portefeuille multicohorte, les résultats suggèrent que les forwards et les options remplissent leurs rôles puisque l'écart-type, la VaR et l'Expected Shortfall à 99% diminuent grandement. Les forwards semblent plus performants dans la diminution du risque que les options, en revanche les options permettent de garder des surplus plus élevés en moyenne avec un biais positif. La réduction du risque mesurée avec l'Expected Shortfall, qui permet de prendre en compte le biais des options, indique que les deux types d'instruments de couverture ont la même efficacité.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, Alain Bélanger, professeur de finance à l'Université de Sherbrooke, pour sa disponibilité et le temps qu'il m'a consacré. Ses conseils avisés et indispensables m'ont permis de mener à bien cette recherche. Etudier et réaliser mon activité de recherche sous sa supervision fut un privilège tant par sa qualité d'enseignement, l'excellence de son encadrement et sa grande expérience.

Je remercie l'Université de Sherbrooke de m'avoir accepté pour entreprendre cette maîtrise en finance, pour la qualité de son enseignement, l'excellence de son corps professoral et son soutien financier en m'accordant la bourse d'excellence VoiceAge. Je souhaite exprimer également ma reconnaissance à La Fondation de l'Ecole de Gestion pour l'attribution de la bourse Paul Prévost ainsi qu'à l'équipe du BRIO de l'Université de Sherbrooke pour leur aide. Ces deux bourses ont contribué à la réalisation de ce mémoire dans la mesure où elles m'ont permis de me concentrer entièrement sur ma recherche sans me soucier de son financement. Je souhaite exprimer aussi toute ma reconnaissance au professeur Guy Bellemare qui a gentiment accepté de lire mon mémoire.

Je tiens à remercier Addenda Capital et l'Institut Canadien des Actuaire qui participent également à ma bourse VoiceAge via le programme MITACS Accélération ainsi qu'à Christian Robert pour le temps qu'il a pris à lire mon mémoire.

Enfin, un remerciement spécial à mes amis, Valérie Beaupré, Chudomira Nedyalkova et David Leblanc-Brasseur qui m'ont apporté leur soutien moral pendant toute ma Maitrise, ainsi qu'aux membres de ma famille, en particulier mes parents, qui ont été présents tout au long de mes études pour me soutenir et m'encourager dans les bons et les moins bons moments.

Mise en contexte

Le phénomène du vieillissement de la population est une réalité à laquelle doit faire face la majorité des pays industrialisés. Bien que certains événements inattendus comme la Seconde Guerre Mondiale, les maladies cardiovasculaires liées à l'obésité et au diabète ou encore la récente pandémie du Coronavirus (COVID-19), peuvent affectés négativement les taux de mortalité, les progrès dans le domaine de la santé et le meilleur niveau de vie général tendent à améliorer continument l'espérance de vie. Ces tendances démographiques amènent dès lors des préoccupations concernant la viabilité de certains fonds de retraite. En parallèle, on observe des taux de natalité en deçà du seuil de renouvellement de la population depuis des années, ce qui a pour effet d'inverser la pyramide des âges. Par conséquent, il y aurait relativement plus de retraités que de personnes actives sur le marché du travail et les régimes de retraites offrant des prestations déterminées pourraient faire face à un risque de défaut. Ce mémoire vise ainsi à trouver des solutions pour protéger les différentes parties prenantes face à ces nouveaux risques non-mutualisables.

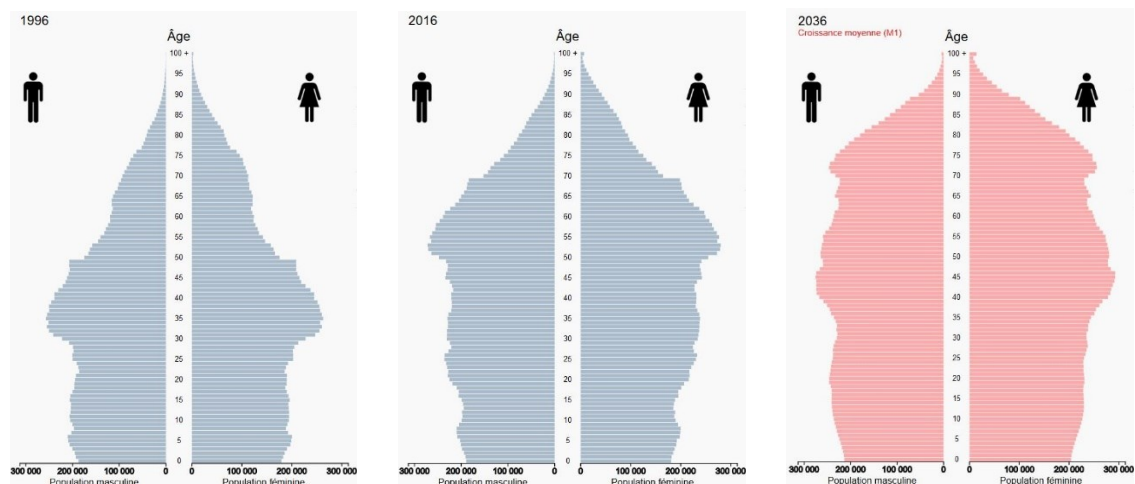


Illustration de l'inversion de la pyramide des âges au Canada

Table des matières

Résumé.....	ii
Remerciements	iii
Mise en contexte.....	iv
Table des matières	v
1. Introduction	1
2. Objectifs du mémoire et contributions.....	3
3. Revue de littérature	4
4. Description des données.....	7
5. Modélisation des taux de mortalité.....	12
5.1 Modèle de Lee-Carter	13
5.1.1 Présentation du modèle de base de Lee-Carter	13
5.1.2 Estimation des paramètres du modèle	14
5.2 Modèle de Li-Lee.....	17
5.2.1 Du modèle LC au modèle à facteur commun augmenté de Li-Lee	18
5.2.2 Choix du modèle grâce au ratio d'explication.....	20
5.2.3 Modélisation des Kappas et prévisions des taux de mortalité futurs.....	21
5.3 Modèle de Cairns, Blake et Dowd (CBD) : M5 et M7	27
5.3.1 Présentation du modèle M5 et M7	27
5.3.2 Estimation des paramètres des modèles et modélisation des Kappas.....	30
6. Portefeuille d'annuités et ajustement pour le risque.....	35
6.1 Obligation de longévité.....	35
6.2 Calibration pour le risque.....	36
6.2.1 Transformée de Wang.....	37
6.2.2 Evaluation Canonique	38
6.2.3 Modèle à deux facteurs ajusté pour le risque	41
6.2.4 Comparaison de l'évolution des primes de risque annuelles obtenues avec les trois méthodes de tarification	44
6.3 Construction du portefeuille d'annuités et distribution des Surplus	45
7. Instruments financiers dérivés utilisés pour la couverture	48
7.1 Couverture avec des produits dérivés de survie.....	48
7.1.1 Les S-Forwards (ou S-Swaps).....	49
7.1.2 Les Caplets de longévité (S-Caps).....	50

7.1.3	Résultats de la couverture de survie unicohorte	51
7.1.4	Portefeuille multicohorte et couverture en survie multicohorte	55
7.2	Couverture avec des produits dérivés de mortalité	58
7.2.1	Les Key Q-Durations [22].....	59
7.2.2	Mise en place de la couverture	63
7.2.3	Résultats de la couverture en mortalité unicohorte.....	64
7.2.4	Couverture en mortalité multicohorte	67
7.3	Couverture avec des produits dérivés de Kappa	71
7.3.1	Les Key K-Durations.....	72
7.3.2	Résultats de la couverture en kappa unicohorte	73
7.3.3	Couverture en kappa multicohorte.....	76
7.4	Efficacité de la couverture	78
	Conclusion	81
	Bibliographie	83
	Annexes	86
	Annexe 1 : Décomposition en valeurs singulières	86
	Annexe 2 : Paramètres du Modèle LC pour les Etats-Unis et le Royaume-Uni.....	88
	Annexe 3 : Paramètres du Modèle LL pour les Etats-Unis et le Royaume-Uni.....	89
	Annexe 4 : Primes de risques annuelles estimées (en points de base) pour les obligations de longévité avec différentes dates de maturité.....	90
	Annexe 5 : Primes de risques annuelles estimées avec l’Evaluation Canonique (en points de base) sur les périodes 1960-2016 et 1980-2016.....	91
	Annexe 6 : Statistiques selon une couverture en survie unicohorte sur 20 et 30 années avec le modèle M5 pour les femmes canadiennes	92
	Annexe 7 : Statistiques selon une couverture en survie unicohorte sur 20 et 30 années avec le modèle Li-Lee pour les femmes canadiennes	93
	Annexe 8 : Statistiques selon une couverture en survie multicohorte avec un portefeuille en escalier sur 20 cohortes (M7)	94
	Annexe 9 : Statistiques selon une couverture en survie multicohorte avec un portefeuille en escalier sur 20 cohortes (M5)	95
	Annexe 10 : Statistiques selon une couverture en survie multicohorte avec un portefeuille en escalier sur 20 cohortes (Li-Lee)	96
	Annexe 11 : Statistiques des surplus selon une couverture en mortalité unicohorte avec le modèle M5 pour les femmes canadiennes.....	97
	Annexe 12 : Statistiques selon une couverture en mortalité unicohorte avec le modèle Li-Lee pour les femmes canadiennes	98

Annexe 13 : Statistiques selon une couverture en mortalité multicohorte avec le modèle M5 pour les femmes canadiennes	99
Annexe 14 : Statistiques selon une couverture en mortalité multicohorte avec le modèle Li-Lee pour les femmes canadiennes.....	100
Annexe 15 : Statistiques selon une couverture en kappa unicohorte avec le modèle M5 pour les femmes canadiennes	102
Annexe 16 : Statistiques selon une couverture en kappa unicohorte avec le modèle Li-Lee pour les femmes canadiennes	103
Annexe 17 : Statistiques selon une couverture en kappa multicohorte avec le modèle M5 pour les femmes canadiennes	105
Annexe 18 : Statistiques selon une couverture en kappa multicohorte avec le modèle Li-Lee pour les femmes canadiennes	106
Annexe 19 : Pourcentage de réduction de risque provenant de portefeuilles couverts en multicohorte	107

1. Introduction

Selon l'Organisation des Nations-Unies [27], « le vieillissement de la population est en train de devenir l'une des plus importantes transformations sociales du XXI^{ème} siècle, avec des répercussions dans presque tous les secteurs de la société, notamment dans le monde du travail, et sur les marchés financiers ». Entre 2000 et 2050, la proportion de la population mondiale de plus de 60 ans doublera pour passer d'environ 11% à 22%, ce qui correspond en nombre absolu à une augmentation de 605 millions à deux milliards d'individus au cours de la période. Cette transformation démographique est d'autant plus impressionnante qu'elle s'accélère. En effet, il a fallu plus de 100 ans pour que la part de la population française âgée de 65 ans et plus double (7% à 14%), alors qu'il ne faudra que 25 ans à des pays comme le Brésil et la Chine pour connaître la même croissance de leur population, selon l'Organisation Mondiale de la Santé [28]. L'évolution du paysage démographique canadien au cours des dernières décennies reflète bien la tendance mondiale puisque l'espérance de vie à la naissance pour les hommes (femmes) était de 56.03 (58.22) ans en 1921 et 80.05 (84.18) ans en 2016 [14].

Cette augmentation marquée de l'espérance de vie a des conséquences directes sur les compagnies d'assurance-vie ainsi que les fonds de pension publics et privés. Ces derniers s'exposent à un risque démographique en garantissant à leurs bénéficiaires un certain niveau de revenu entre le moment de la retraite et celui du décès. Le risque de longévité est le risque que, pour une population donnée, la durée de vie moyenne de l'ensemble des individus soit plus longue que ce qui est attendu. Il se décompose en deux risques, spécifique et systémique, ce qui amène la question de l'assurabilité. La conception actuarielle des limites de l'assurabilité définit un risque assurable comme un risque auquel peut s'appliquer la loi des grands nombres. Dans ce cas, le risque est diversifiable au sens de l'assurance et disparaît complètement si l'assureur est capable de se constituer une mutualité suffisamment grande. Un risque indiversifiable ne disparaît pas par mutualisation et, de ce fait, est difficilement assurable. Le risque de longévité comprend une part systémique. Il s'agit du risque que la mortalité agrégée de la population de référence spécifique dévie, à long terme, de sa valeur attendue à un âge et au-delà d'un horizon de temps donné. Le risque systémique de longévité est non

diversifiable au sens de l'assurance contrairement au risque de longévité individuel (spécifique) qui peut être aisément éliminé par mutualisation au sein d'un portefeuille bien diversifié comme le prédit la loi des grands nombres. Compte tenu de l'augmentation constante de l'espérance de vie, il est impératif pour les fonds de pension de trouver des solutions pour atténuer les effets du risque de longévité sur leurs portefeuilles.

Depuis plusieurs décennies déjà, des démographes et actuaires se penchent sur le développement de modèle de prévisions des taux de mortalité. Ces prévisions permettent entre autres de déterminer l'espérance des taux de mortalité futurs pour que les fonds de pension aient une idée générale des rentes viagères à payer aux retraités. Dahl [9] a cependant montré que ces modèles déterministes ont historiquement tendance à sous-estimer l'espérance de vie. Jusqu'au début des années 2000, il n'existait pas de moyens de couverture efficaces contre le risque de longévité. Afin d'offrir aux compagnies d'assurance-vie et fonds de pension la possibilité de gérer ce risque, Blake et Burrows [3] ont suggéré la création des obligations de longévité. Bien que leur utilisation n'ait pas encore connu un franc succès, cette initiative a ouvert la voie à plusieurs réflexions, dont celle de développer un marché de produits financiers dérivés pour se couvrir. Il s'agit d'une solution prometteuse mais qui n'en est qu'à ses prémices. Cette étude va se pencher plus particulièrement sur deux produits dérivés qui sont déjà utilisés sur le marché pour couvrir son portefeuille d'actions ou d'obligations : les forwards et les options. On va construire un portefeuille synthétique et évaluer l'efficacité de ces instruments de couverture dont les sous-jacents seront les survies, les mortalités et les paramètres de modèles stochastiques utilisés pour les prévisions de taux.

Après cette brève introduction, ce mémoire formule les objectifs et les contributions pratiques apportées à la littérature. La section 3 inclut une revue de la littérature sur les principales études portant sur le risque de longévité et les différentes méthodologies employées pour l'évaluer. La section 4 présente les données utilisées pour cette étude. La section 5 décrit la méthodologie des différents modèles de taux de mortalité, c'est-à-dire les modèles Li-Lee [24], M5 de Cairns et al. [6] et M7 de Cairns et al. [7], et leur mise en place. La section 6 présente la construction du portefeuille d'annuités auquel on applique les instruments financiers dérivés de couverture dans la

section 7. Après une brève analyse de l'efficacité des couvertures, ce mémoire se conclut en exposant les faits saillants des différents résultats.

2. Objectifs du mémoire et contributions

Le premier objectif de ce mémoire est de modéliser et prédire les taux de mortalité futurs à l'aide de trois modèles : le modèle Li-Lee [24] (référence en actuariat), le modèle M5 de Cairns et al. [6] et le modèle M7 de Cairns et al. [7]. Ces trois modèles permettent ensuite de simuler des scénarios de décès afin de tester un portefeuille de rentes viagères. L'utilisation de différents instruments financiers dérivés pour la couverture du risque de longévité et l'évaluation de leurs efficacités constituent le second objectif de ce travail.

Bien que la littérature scientifique regorge d'articles sur le risque de longévité, aucun article ne s'intéresse à la fois à la couverture en survie, en mortalité et en kappa pour une population donnée tout en prenant en compte un ajustement pour le risque. En ce sens, cette étude permet une avancée dans ce domaine grâce aux résultats obtenus avec la population des femmes canadiennes, et également, dans une moindre mesure, avec la population des hommes canadiens, américains et britanniques. D'un point de vue pratique, la contribution principale est de justifier le besoin d'un marché de produits dérivés sur la longévité, en particulier au Canada. Les transactions sur les produits de longévité sont en croissance depuis quelques années à l'échelle mondiale, ce qui traduit un intérêt et une volonté de se protéger contre ce risque. D'ailleurs, ce mémoire traite non seulement de portefeuilles unicohortes, mais également de portefeuilles multicohortes. En effet, ces portefeuilles reflètent davantage la réalité à laquelle doivent faire face les participants du marché, en particulier les fonds de pension et les compagnies d'assurance. Les conclusions de l'efficacité des trois types de couverture n'en seront que renforcées, dans l'optique d'un développement et d'une mise en place concrète de tels instruments sur le marché.

3. Revue de littérature

Afin de dresser un portrait global du sujet, il est important de mentionner l'évolution des études passées ainsi que les résultats les plus marquants dans la littérature scientifique. Le risque de longévité en tant que tel est certes une problématique des temps modernes, mais l'intérêt pour la démographie, en particulier la prévision des taux de mortalité, ne date pas d'hier, bien qu'il se soit accéléré ces dernières décennies. La mathématisation de la science de la population a beaucoup progressé au XIX^{ème} siècle, notamment grâce à la formulation d'une loi de la mortalité fondée sur l'âge par Benjamin Gompertz [12] et de la loi logistique par Pierre-François Verhulst [35]. Dans sa publication de 1825, Gompertz suggéra que la force de la mortalité augmentait de façon exponentielle avec l'âge selon le modèle paramétrique :

$$\ln(q_x) = \alpha x * \ln(K)$$

où q_x correspond à la probabilité de décès dans l'année d'un individu âgé de x années, K et α étant des constantes. Une telle loi n'a pas seulement un rôle théorique, elle répond aussi aux problèmes concrets que se posaient les actuaires à une époque où les statistiques de mortalité étaient encore incertaines. Petit à petit les données de recensement se sont améliorées et ont mis en lumière quelques insuffisances du modèle aux âges assez jeunes, ce qui a poussé Makeham [25] à proposer l'ajout d'une constante au modèle. A la même période, Verhulst a proposé un autre modèle de croissance d'une population que celui proposé par Malthus. Ce modèle, qui utilise entre autres une fonction qu'il nommera « fonction logistique » en 1845, stipule qu'une population verrait sa croissance ralentir au fur-et-à-mesure que son effectif progresse. Malgré le fait que ces premiers travaux datent d'il y a presque deux siècles, ce n'est que depuis tout récemment que les modèles de prévisions se sont multipliés.

Ces récents modèles stochastiques de prévisions sont issus tout d'abord de la branche des statistiques appliquées à la démographie. Ils utilisent les taux de mortalité historiques pour exprimer les taux de mortalité futurs en se basant sur l'hypothèse que la tendance des taux dans le temps est constante et qu'elle sera la même dans l'avenir. On verra toutefois dans la Section 5 qu'il est important de bien choisir le nombre d'années de

données dans la période d'étude. En effet, on peut prendre des données tellement lointaines qu'elles ne correspondraient plus forcément aux tendances d'aujourd'hui. D'ailleurs Li [20] a souligné que si la période d'étude était trop longue alors cette hypothèse n'était pas respectée. L'un des modèles d'inspiration démographique de base est celui de Lee-Carter [19] qui consiste à extrapoler les tendances passées. Ce modèle a tout d'abord été développé spécifiquement pour les données américaines et suppose que les taux de mortalité sont log-linéaires. L'idée est d'ajuster à la série (doublement indicée par x et t) des logarithmes des taux une structure paramétrique à laquelle s'ajoute un phénomène aléatoire. Il a par la suite été repris avec d'autres données, comme ceux des pays du groupe du G7 pour Tuljapurkar et al. [33] par exemple, au point où il s'est rapidement imposé comme le modèle actuariel étalon pour la prédiction des taux de mortalité. Dès lors, de nombreuses études et extensions de ce modèle ont été développées, à l'image des travaux de Wilmoth [38] et Lee [18] qui ont plutôt estimé les paramètres en utilisant la méthode des moindres carrés (OLS). Alho [1], quant à lui, a privilégié l'estimation des paramètres avec la méthode du maximum de vraisemblance (« Maximum Likelihood »). Cette approche se base sur l'approximation du nombre de décès observés $D_x(t)$, qui suivrait une loi de Poisson. Le modèle est alors défini par :

$$D_x(t) \sim \text{Poisson}(m_x(t)E_x(t))$$

où $m_x(t) = e^{a_x + b_x k_t}$ est le taux de mortalité modélisé et $E_x(t)$ représente l'exposition au risque de mortalité. Selon Alho, sa méthode résoudrait en partie l'inconvénient principal de la méthode avec OLS qui pose l'hypothèse que les résidus sont homoscedastiques. Le logarithme des taux de mortalité observés est davantage variable aux âges avancés plutôt qu'aux jeunes âges parce que le nombre de personnes aux âges avancés est plus petit et donc l'impact marginal d'un décès supplémentaire est plus important. Bien que réutilisée par Brouhns et al. [5], cette approche ne se sera toutefois pas vraiment imposée. Une autre estimation possible des paramètres est celle proposée par Booth et al. [4]. Ils furent les premiers à souligner que l'utilisation de la décomposition en valeurs singulières (SVD) pour l'estimation du modèle Lee-Carter sélectionne seulement la première paire de paramètres β_x et κ_t parmi la multitude de paires estimées. Ce point est en partie développé dans la modélisation du modèle Lee-Carter (Section 5)

où l'on s'intéresse aux deux premières paires de paramètres. De façon générale, cette extension peut mener à un modèle bien plus compliqué de la forme suivante :

$$\ln(m_x(t)) = \alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)}$$

Ultérieurement, ces modèles avec plusieurs termes âge/période (β_x et κ_t) ont fait l'objet d'études plus spécifiques comme celle de Hyndman et Ullah [15] qui utilise l'analyse des données fonctionnelles, et dont ma collègue C. Nedyalkova [26] traite également dans son mémoire, ou encore celle de Wang et al. [36] qui utilise l'analyse en composantes principales. Ces extensions du modèle de Lee-Carter se sont montrées moins populaires dans la pratique, probablement à cause du grand nombre de paramètres qui rendait la prévision compliquée. Dans ce mémoire, on va se pencher davantage sur l'extension proposée par Li et Lee [24] où l'application du modèle Lee-Carter se fait dans un premier temps sur un groupe de population pour identifier la tendance centrale du groupe (facteur commun), puis dans un second temps on identifie les particularités et les tendances historiques de chaque population à moyen terme. Bien qu'on ne l'abordera pas dans cette étude, le modèle Li-Lee est adapté pour prendre en compte le risque de base de chaque population et permettre la mise en place d'une couverture entre population (« cross-population hedge »). Les différents modèles énumérés jusqu'à présent s'inspirent du modèle de Lee-Carter, mais il existe d'autres types de modèles de prédictions des taux de mortalité dans la littérature. En 2006, Cairns et al. [6] ont proposé un nouveau modèle, le modèle CBD M5, qui sort du paradigme Lee-Carter dont l'une des propriétés est très intéressante dans l'optique de développer des produits de longévité sur le marché. Il s'agit de la propriété d'invariance des données et elle consiste à garder les valeurs des paramètres passés identiques même après l'ajout de nouvelles données dans l'estimation. Chan et al. [8] précise toutefois que les « fits » sont moins bons que les autres modèles, ce qu'il va tenter de corriger quelques années plus tard. En effet en 2009, Cairns et al. [7] ont élargi leur modèle M5 initial et examiné trois autres modèles qu'ils ont nommés M6, M7 et M8. Ils se définissent par :

$$\text{M5 : } \text{logit}(q_{x,t}) = \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t)$$

$$M6 : \text{logit}(q_{x,t}) = \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + \gamma_{t-x}$$

$$M7 : \text{logit}(q_{x,t}) = \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + ((x - \bar{x})^2 - \sigma_x)\kappa_3(t) + \gamma_{t-x}$$

$$M8 : \text{logit}(q_{x,t}) = \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + (x - x_c)\gamma_{t-x}$$

Tous ont la même forme de base que le modèle M5 auquel on rajoute un terme de cohorte, et également un effet quadratique dans le cas de M7. Les « fits » s'améliorent par rapport au modèle M5, ce qui règle en partie le problème du « fit » même si c'est tout à fait logique compte tenu que ces modèles vont chercher de la structure dans les résidus de M5 avec des paramètres en plus. Ils sont donc non seulement moins parcimonieux mais ils ne respectent plus la propriété d'invariance du modèle M5 en contrepartie à cause de plusieurs contraintes d'identifiabilité du modèle qu'ils doivent respecter. En pratique, le modèle M7 s'avère être la plus populaire des extensions du modèle M5 parce qu'il a de meilleurs « fits » que M6 et que la sélection du x_c approprié pour le paramètre de cohorte avec M8 rend plus compliqué le « fit » des données. C'est pourquoi le choix du troisième modèle s'est porté sur M7. Bien que ce mémoire ne va traiter que des modèles Li-Lee, M5 et M7, il est important de faire remarquer qu'il existe encore d'autres modèles tel le modèle de Renshaw et Haberman [30], dit M2, qui incorpore un terme de cohorte dans le modèle de Lee-Carter, le modèle âge-période-cohorte d'Osmond [29], appelé également M3, ou encore d'autres modèles s'inspirant de la finance comme l'utilisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec entre autres des mouvements browniens.

4. Description des données

Avant de présenter les données utilisées et la façon dont elles ont été obtenues, définissons le taux central de mortalité pour la cohorte âgée de x années à l'année t . En reprenant les travaux de Cairns et al. [9], on appelle le taux de mortalité central pour un individu âgé de x années à l'année t , $m(x,t)$, lequel correspond au nombre de décès au cours de l'année t des individus âgés de x années divisé par la moyenne de la population observée lors de l'année t et âgée de x années. La moyenne de la population s'approxime souvent par un estimé de la population âgée de x années au milieu de l'année t , soit le 30 Juin. Le taux central de mortalité est alors donné par :

$$m_{x,t} = \frac{\text{Nombre de décès lors de l'année } t \text{ des individus âgés de } x \text{ années}}{\text{Population observée à la moitié de l'année } t \text{ et âgée de } x \text{ années}}$$

Comme notre étude se consacre en partie à la comparaison et la dépendance de la mortalité estimée entre populations, les données utilisées sont les taux centraux de mortalité chez les hommes et les femmes âgés de 0 à 110 ans et plus pour le Canada, les Etats-Unis et le Royaume-Uni. La fenêtre d'étude peut s'étendre de 1933, date à partir de laquelle les premières données américaines sont disponibles, jusqu'à 2016. Ces données sont disponibles via la base de données de mortalité humaine (Human Mortality Database ou HMD) [14]. Cette base de données a été créée par le département de démographie de l'Université de Californie, Berkeley (Etats-Unis) ainsi que l'Institut Max Planck (Allemagne) afin de fournir des données détaillées sur la population et la mortalité d'une quarantaine de pays. Elle contient entre autres les taux de mortalité centraux ($m_{x,t}$), la probabilité de décès dans l'année ($q_{x,t}$), le nombre de décès ($d_{x,t}$) ou encore l'espérance de vie ($e_{x,t}$) en fonction de l'âge x et de l'année t . Bien que certaines méthodes d'estimation, comme le modèle Lee-Carter originel [19], préconisent de regrouper les données par tranches de 5 ans, nous utilisons dans toute notre étude les taux centraux âge par âge. Notons aussi que les modélisations choisies sont en âges spécifiques et non en cohortes, c'est-à-dire en suivant les diagonales de la matrice ci-dessous. Avec la notation du taux central de mortalité précédemment énoncée, la matrice de données se présente alors sous la forme :

Âges/Années	1933	1934	...	2015	2016
0	$m_{0,1933}$	$m_{0,1934}$	\cdots	$m_{0,2015}$	$m_{0,2016}$
1	$m_{1,1933}$	\ddots	\ddots	\ddots	$m_{1,2016}$
\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	\ddots	\vdots
109	$m_{109,1933}$	\ddots	\ddots	\ddots	$m_{109,2016}$
110	$m_{110,1933}$	$m_{110,1934}$	\cdots	$m_{110,2015}$	$m_{110,2016}$

La Figure 1 représente cette matrice où l'on remarque que les taux augmentent avec l'âge. Les séries temporelles pour chaque âge semblent suivre une tendance à la baisse, comme l'illustre la Figure 2 qui est un gros plan de la Figure 1 pour les femmes âgées de 65 ans, grâce notamment aux progrès de la médecine et de la technologie qui ont

permis d'améliorer le niveau de vie et conséquemment diminuer les taux de mortalité. Ce phénomène est non seulement observable pour les trois populations de l'étude pour tous âges et genres, mais il est également de la même ampleur. Autrement dit la tendance décroissante des données pour un âge spécifique tourne autour des mêmes taux. Pour l'âge de 65 ans par exemple, les taux de mortalité des trois populations est d'environ 0,03 en 1933 et diminuent en 2016 entre 0,007 et 0,01. Cette forte proximité des données ainsi que de la tendance générale est renforcée du fait que ces trois pays sont développés et partagent un même mode de vie.

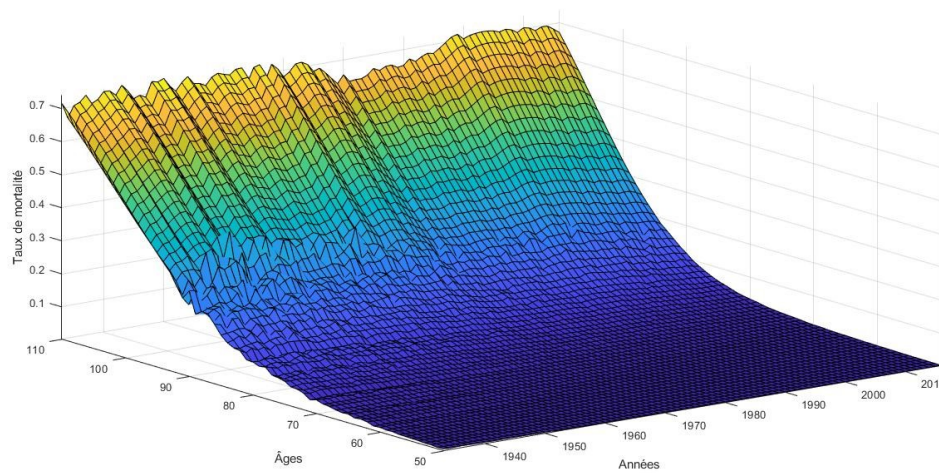


Figure 1 : Taux de mortalité bruts des femmes canadiennes de 50 à 110 ans

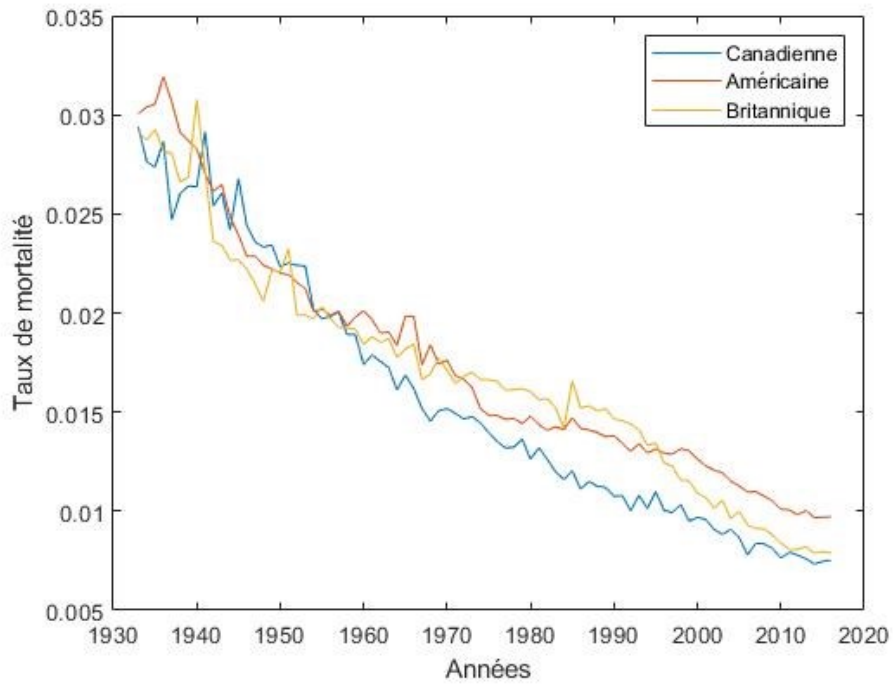


Figure 2 : Taux de mortalité des femmes de 65 ans pour les trois populations

Un des objectifs de ce mémoire étant de tarifier des produits dérivés de longévité, la modélisation des taux de mortalité que l'on utilise doit être la plus précise possible. Dès lors, il est nécessaire d'aborder la notion de stationnarité des séries temporelles afin d'éviter des régressions fallacieuses. En effet, si les séries temporelles sont non-stationnaires, ce qui est le cas comme le suggère la Figure 2, les prédictions obtenues pourraient être trop optimistes et erronées. La solution consiste à les rendre stationnaires en différenciant les données par rapport au temps :

$$\Delta m_{x,t} = m_{x,t} - m_{x,t-1} \quad (1)$$

On présente les données différenciées pour les femmes canadiennes à la Figure 3. Afin de mieux visualiser la stationnarité des séries temporelles et de comparer les trois populations entre elles, on présente à la Figure 4 les taux de mortalité différenciés à travers le temps pour les femmes âgées de 65 ans. Bien que le graphique ne soit pas une statistique, comme le test de Dickey-Fuller que nous utiliserons plus loin dans ce mémoire, il semble indiquer que les séries différenciées sont bien stationnaires, ce qui nous permet ainsi de chercher un modèle valide.

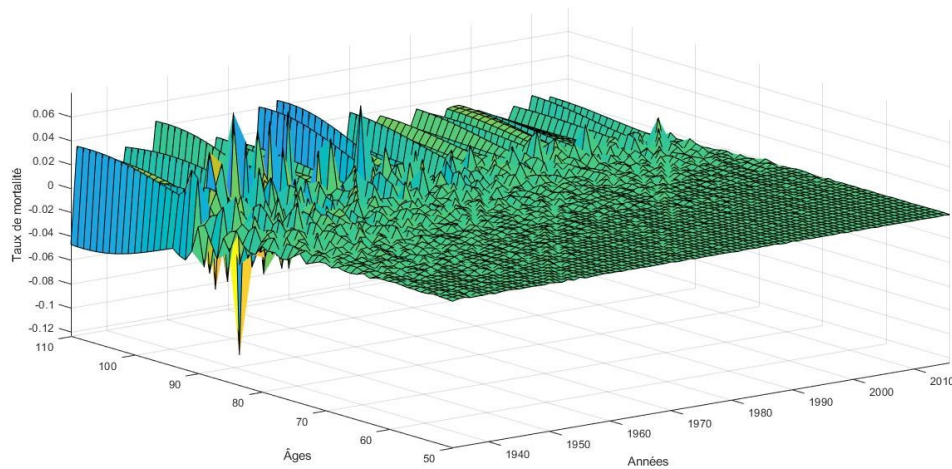


Figure 3 : Taux de mortalité différenciés des femmes canadiennes de 50 à 110 ans

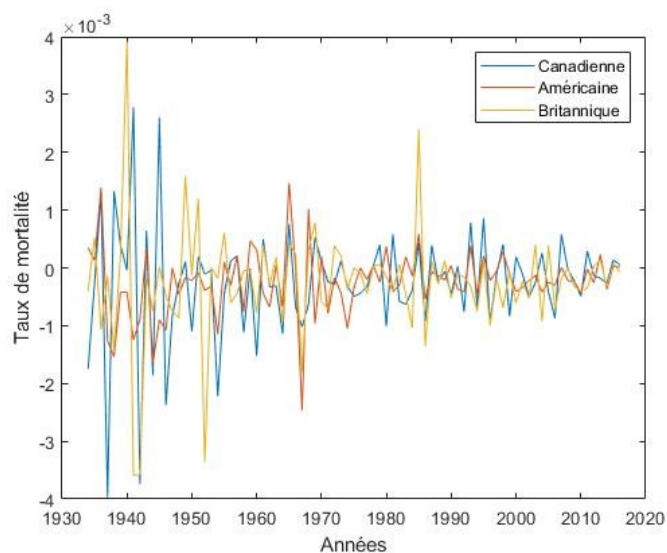


Figure 4 : Taux de mortalité des femmes de 65 ans différenciés pour les trois populations

On constate également que la volatilité des taux de mortalité et des données différenciées (respectivement Figure 1 et 3) tend à augmenter de plus en plus avec l'âge. Ce phénomène est d'autant plus prononcé pour les grands âges puisque l'impact marginal du décès d'une personne de 90 ans sur les taux de mortalité sera plus important que celui d'une personne de 65 ans. Les populations les plus âgées étant moins nombreuses, la fluctuation aléatoire des données est alors plus marquée. Human Mortality Database [14] a ainsi remédié à ce

problème en lissant les taux de mortalité avec le modèle de Kannisto [16], ce qui explique les tendances linéaires observées à partir de 90 ans.

5. Modélisation des taux de mortalité

Depuis plusieurs années, de nombreux modèles de mortalité stochastiques extrapolatifs sont utilisés. Ces modèles sont construits de la même manière : quand ils modélisent les données historiques, une ou plusieurs séries de paramètres variables dans le temps ou en fonction des âges sont identifiées. En extrapolant les paramètres temporels dans le futur, des prévisions de mortalité sont obtenues. Ces paramètres, qui contiennent de précieuses informations sur l'évolution de la mortalité dans une population au cours du temps, peuvent être utilisés comme indices de mortalité. Dans cette section, nous allons modéliser les taux de mortalité des populations canadiennes, américaines et britanniques de deux façons pour pouvoir estimer au mieux les taux de mortalité futurs. Nous introduirons dans un premier temps le modèle de référence de Lee-Carter (LC) [19] auquel nous appliquerons l'extension proposée par Li et Lee (LL) [24] en incorporant un facteur commun et un facteur spécifique propre à chaque population. La seconde méthode d'estimation consiste à implémenter le modèle M5 de Cairns et al. [6] aux mêmes données. Le choix de ce modèle est justifié par sa robustesse par rapport à une extension de la période de référence, autrement dit quand les taux de mortalité d'une nouvelle année sont disponibles et que le modèle est mis à jour en les incorporant, alors les indices des années précédentes ne seront pas affectés. Cette propriété est très importante pour l'application que l'on en fait en finance, notamment en actuariat, car ce serait impossible de suivre un indice si ces valeurs historiques devaient être révisées régulièrement. Enfin, le modèle M7 de Cairns et al. [7] sera également traité puisqu'il donne les meilleurs « fits » et qu'il s'inspire du modèle M5 qui possède la propriété d'invariance et sur lequel se fonde la couverture en kappa.

5.1 Modèle de Lee-Carter

5.1.1 Présentation du modèle de base de Lee-Carter

Le modèle proposé par Lee et Carter [19] est devenu un modèle actuariel étalon pour la prédiction des taux de mortalité, que ce soit pour de simples fins statistiques de recensement ou pour les couvertures d'assurance dans l'actuariat contemporain. La modélisation ainsi retenue est la suivante :

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t} \quad (2)$$

où :

$m_x(t)$ représente le taux central de mortalité à la date t pour l'âge x ,

α_x est la composante spécifique à l'âge x et s'interprète comme la valeur moyenne des $\ln(m_{x,t})$ au cours du temps,

κ_t décrit l'évolution générale de la mortalité par rapport au temps,

β_x traduit la sensibilité par âge de la mortalité par rapport à l'évolution générale de la mortalité,

$\varepsilon_{x,t}$ est le résidus reflétant les particularités propres à l'âge x et à l'année t non capturées par le modèle.

Les données initiales se présentent sous la forme d'une matrice de taux de mortalité doublement indicée par l'âge (généralement en ligne) et le temps (en colonne). Le modèle consiste à décomposer le logarithme des taux de mortalité centraux selon deux composantes, l'âge et le temps, grâce à une structure paramétrique déterministe ($\alpha_x + \beta_x \kappa_t$) à laquelle s'ajoute une variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée selon une loi $N(0, \sigma^2)$. L'estimation des taux de mortalité est alors obtenue en extrapolant l'évolution de ces facteurs dans l'avenir à partir des tendances passées. Le modèle est toutefois non identifiable car sur-paramétré. Il convient de poser quelques contraintes supplémentaires sur les paramètres pour garantir l'identifiabilité du modèle :

$$\sum_{x=x_0}^{x_M} \beta_x = 1 \text{ et } \sum_{t=t_0}^{t_M} \kappa_t = 0$$

avec x_0 et t_0 respectivement l'âge minimum et la première année de la période d'étude, et x_M et t_M respectivement l'âge maximum et la dernière année de la période d'étude.

5.1.2 Estimation des paramètres du modèle

La partie droite de l'équation ne comportent que des variables à estimer (α_x, β_x et κ_t) et aucune variables observables, l'estimation des paramètres se fait donc avec la méthode des moindres carrés ordinaires et une décomposition en valeurs singulières (SVD) :

$$(\widehat{\alpha}_x, \widehat{\beta}_x, \widehat{\kappa}_t) = \arg \min \sum_{x,t} (\ln(m_{x,t}) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$$

1^{ère} étape : Estimation de α_x

L'estimation du paramètre α_x s'obtient grâce à l'équation qui modélise les taux de mortalité et en utilisant la contrainte d'identifiabilité sur les κ_t . Comme α_x dépend de l'âge, l'astuce consiste à sommer les $\ln(m_{x,t})$ sur la période.

$$\sum_{t=t_0}^{t_M} \ln(m_{x,t}) = \sum_{t=t_0}^{t_M} (\alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}) = \sum_{t=t_0}^{t_M} \alpha_x + \beta_x \sum_{t=t_0}^{t_M} \kappa_t + \sum_{t=t_0}^{t_M} \varepsilon_{x,t} \text{ par linéarité}$$

Or,

$$\sum_{t=t_0}^{t_M} \kappa_t = 0 \text{ et } \sum_{t=t_0}^{t_M} \frac{\varepsilon_{x,t}}{(t_M - t_0 + 1)} = 0 \text{ car } \varepsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma)$$

$$d'où \sum_{t=t_0}^{t_M} \alpha_x = (t_M - t_0 + 1) \alpha_x = \sum_{t=t_0}^{t_M} \ln m_{x,t}$$

$$\alpha_x = \frac{1}{t_M - t_0 + 1} \sum_{t=t_0}^{t_M} \ln m_{x,t} \quad (3)$$

On obtient de la Formule (3) que l'estimation de α_x est la moyenne temporelle, à l'âge x , du logarithme des taux instantanés de mortalité.

2^{ème} étape : Estimation de β_x et κ_t avec une décomposition en valeur singulière

Les paramètres β_x et κ_t sont endogènes et se déduisent de la décomposition en valeur singulière (Annexe 1) réalisée sur la matrice $Z_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - \alpha_x$:

$$\widehat{Z}_{x,t} = \widehat{\beta}_x \widehat{\kappa}_t^T = U \Sigma V^T = \sum_i \sigma_i u_i v_i^T \approx \sigma_1 u_1 v_1^T$$

avec :

$$\widehat{\beta}_x = \frac{u_1}{\sum_{x=x_0}^{x_M} u_{1x}} \text{ et } \widehat{\kappa}_t = \sigma_1 \left(\sum_{x=x_0}^{x_M} u_{1x} \right) v_1 \quad (4)$$

On dénote U la matrice des vecteurs singuliers à gauche, V^T la matrice des vecteurs singuliers à droite et Σ la matrice rectangulaire dont la diagonale comprend les différentes valeurs singulières de la matrice $Z_{x,t}$. Les Figures 5 et 6 illustrent l'évolution des paramètres α_x , β_x et κ_t lorsque que l'on applique le modèle LC aux hommes et aux femmes canadiennes. Ces paramètres sont obtenus en utilisant les données de HMD [14] à partir de 1950 au lieu de 1933. Ce choix se justifie d'une part par les taux de mortalité plus élevés causés par la Seconde Guerre Mondiale et par la tendance générale des taux de mortalité qui n'est pas la même en 1933 et en 2016. D'autre part, la modélisation des κ_t avec un modèle ARIMA est plus simple avec les données dès 1950 (marche aléatoire) plutôt qu'à partir de 1933 (ARIMA(1,1,1)).

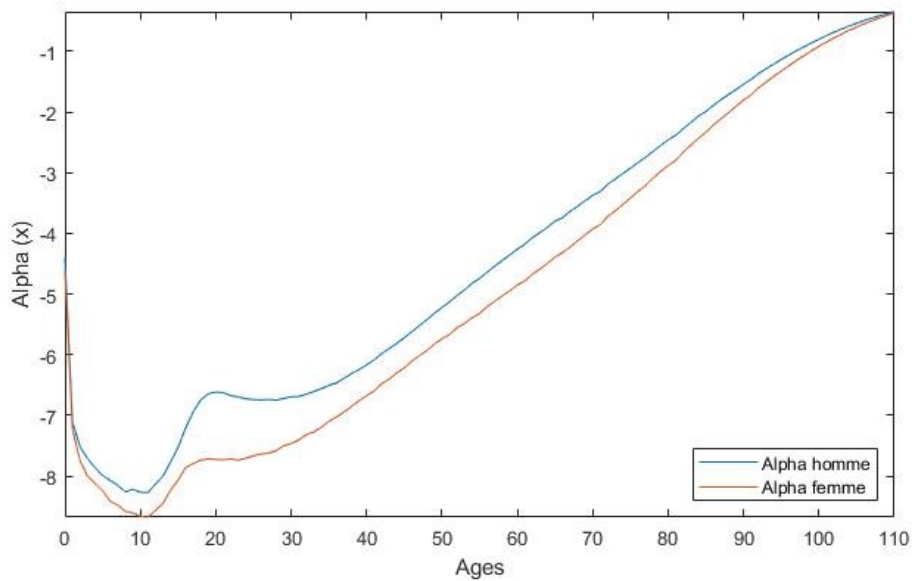


Figure 5 : Alpha de la population canadienne avec le modèle LC

On note que le paramètre α_x , connaît une diminution de 0 à 10 ans et tend à augmenter de façon constante par rapport à l'âge jusqu'à 110 ans. L'augmentation plus prononcée de α_x lors de l'adolescence (12-30 ans) peut s'expliquer par des suicides (surtout chez les jeunes hommes) ou des accidents de la route plus fréquents. La tendance générale des taux de mortalité pour chaque année, κ_t , décroît entre autres à cause des progrès de la médecine et d'un meilleur niveau de vie. Quant à β_x , il nous indique la vitesse à laquelle les taux diminuent par rapport à κ_t .

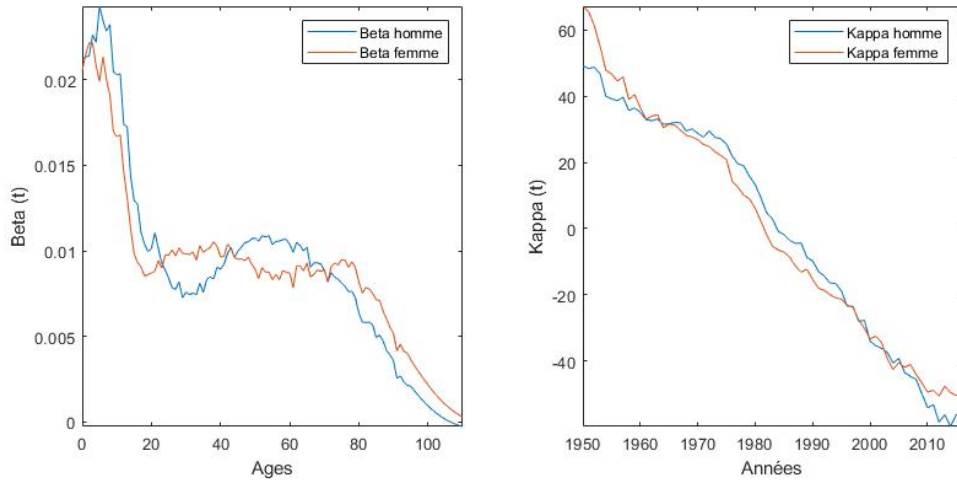


Figure 6 : Beta et Kappa de la population canadienne avec le modèle LC

Pour vérifier la qualité du modèle, on introduit la mesure du taux d'inertie, aussi appelée pourcentage de variance expliquée, et qui se définit par :

$$\tau_i = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_i} = \frac{\sigma_i^2}{\sum \sigma_i^2} \quad (5)$$

où λ_i représentent les valeurs propres de ma décomposition. Le modèle de Lee-Carter ne prend en compte que la première valeur singulière dans l'estimation des paramètres β_x et κ_t . Or si le taux d'inertie τ est jugé insuffisant ou si une structure dans les résidus subsiste, il peut être pertinent d'inclure une ou plusieurs valeurs singulières supplémentaires dans la décomposition. L'extension à deux facteurs du modèle de Lee-Carter proposé par

Booth et al. [4] inclue justement une deuxième valeur singulière pour obtenir le modèle suivant :

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_{x,1}\kappa_{t,1} + \beta_{x,2}\kappa_{t,2} + \varepsilon_{x,t}$$

avec les mêmes contraintes d'identification :

$$\sum_{x=x_0}^{x_M} \beta_{x,1} = \sum_{x=x_0}^{x_M} \beta_{x,2} = 1 \text{ et } \sum_{t=t_0}^{t_M} \kappa_{t,1} = \sum_{t=t_0}^{t_M} \kappa_{t,2} = 0$$

On notera que les valeurs singulières σ_i sont ordonnées de façon décroissante sur la diagonale de la matrice Σ , autrement dit $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_{\min(m,n)}$. L'apport marginal d'une valeur singulière supplémentaire dans l'estimation est ainsi de plus en plus faible. Il devient alors nécessaire de regarder si la précision apportée par une valeur singulière supplémentaire vaut la peine d'alourdir le modèle car il faudra par la suite modéliser les κ_t selon un modèle ARIMA pour les prévisions futures, ce qui sera traité plus loin.

	Hommes	Femmes
Canada	0,9363	0,9311
Etats-Unis	0,9456	0,9499
Royaume-Uni	0,9379	0,9318

Tableau 1 : Taux d'inertie de la SVD

D'après le Tableau 1, tous les taux d'inertie de la SVD sont supérieurs à 0,9. Ces bons résultats, associés au faible apport d'une valeur singulière supplémentaire, nous permettent de conclure que la SVD d'ordre 1 est suffisante pour estimer les paramètres β_x et κ_t .

5.2 Modèle de Li-Lee

Depuis plusieurs décennies, les populations du monde entier deviennent de plus en plus connectées par le commerce, la technologie, les communications, les transports ou même les maladies. Bien que chaque pays ait sa propre histoire, sa culture et un niveau de développement qui lui est propre, la démographie est également touchée par cette

interconnexion mondiale, en particulier pour l'espérance de vie et les taux de mortalité. En effet les tendances et trajectoires de la mortalité pour des populations étroitement liées semblent être relativement similaires et les quelques différences existantes ne tendent pas à s'accroître à long terme. L'extension du modèle de Lee-Carter [19] proposée par Li-Lee [24] vise à mettre en lumière cette interconnexion entre les populations de certains pays, de certaines régions géographiques spécifiques ou simplement entre sexes, en incorporant un facteur commun et un facteur spécifique dans le modèle d'estimation des taux de mortalité de Lee-Carter.

5.2.1 Du modèle LC au modèle à facteur commun augmenté de Li-Lee

Pour éviter les divergences à long terme dans les prédictions de la mortalité moyenne pour un groupe, la condition nécessaire et suffisante est que toutes les populations du groupe doivent avoir les mêmes β_x et κ_t , respectivement dénotés B_x et K_t . Ces paramètres sont obtenus en appliquant le modèle LC au groupe dans son ensemble. On estime ensuite les α_x séparément pour chaque population du groupe ($\alpha_{x,i}$ étant toujours la composante spécifique à l'âge x pour la population i), ce qui ne cause pas de divergence à long terme. Le modèle obtenu ci-dessous est appelé le « modèle à facteur commun de la population i » :

$$\ln(m_{x,t,i}) = \alpha_{x,i} + B_x K_t + \varepsilon_{x,t,i} \quad (6)$$

Bien que ce modèle capte les changements de mortalité au cours du temps pour le groupe, il est généralement moins précis que le modèle LC appliqué séparément à la $i^{\text{ème}}$ population parce que le facteur commun $B_x K_t$ ne minimise pas les erreurs pour la $i^{\text{ème}}$ population. Chaque population possède des caractéristiques différentes qui ne sont pas prises en compte dans le modèle à facteur commun. On constate que plus les populations étudiées ont des conditions socioéconomiques similaires et des connections fortes, plus le modèle à facteur commun donnera de bons résultats dû à des spécificités moins marquées. Toutefois si le modèle à facteur commun n'est pas suffisant, Li et Lee propose dans une seconde phase l'introduction d'un facteur spécifique $\beta_{x,i} \kappa_{t,i}$ pour la $i^{\text{ème}}$ population en utilisant la SVD sur la matrice des résidus du modèle à facteur commun $Z_{x,t,i} = \ln(m_{x,t,i}) - \alpha_{x,i} - B_x K_t$. On forme alors le « modèle à facteur commun augmenté » suivant :

$$\ln(m_{x,t,i}) = \alpha_{x,i} + B_x K_t + \beta_{x,i} \kappa_{t,i} + \varepsilon_{x,t,i} \quad (7)$$

où $B_x K_t$ et $\beta_{x,i} \kappa_{t,i}$ correspondent respectivement au facteur commun du groupe et au facteur spécifique à chaque population appartenant au groupe. La Figure 7 ci-après représente l'évolution de ces différents paramètres en appliquant le modèle LL à la population canadienne pour la modélisation des deux populations femmes et hommes. Ces graphiques pour les populations britannique et américaine se trouvent en Annexe 3.

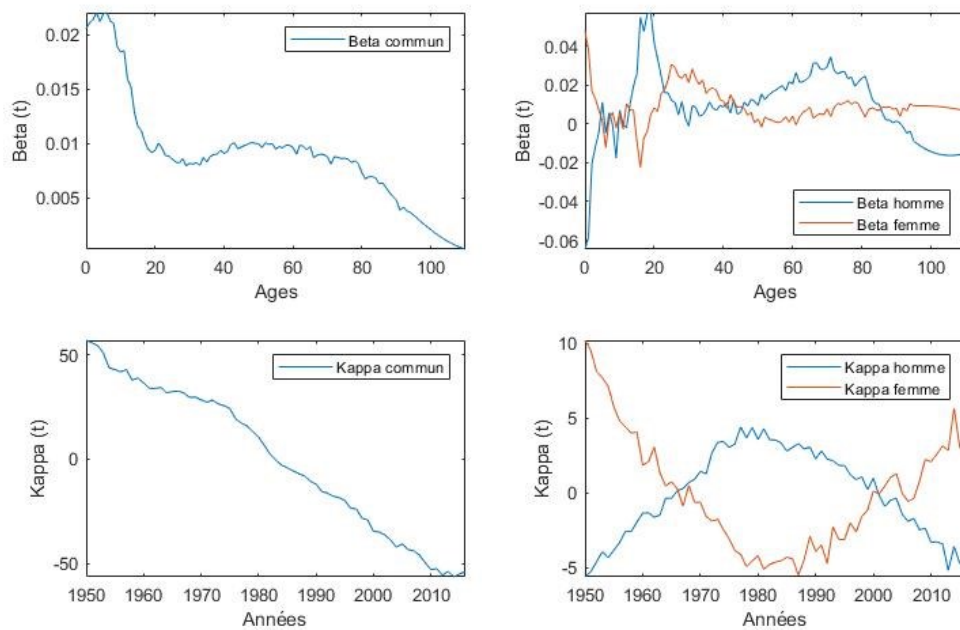


Figure 7 : Beta et Kappa de la population canadienne avec le modèle LL

On remarque que le Beta commun et le Kappa commun sont similaires à ceux de la Figure 6 puisque ces deux paramètres vont chercher la structure commune entre la population des hommes canadiens et des femmes canadiennes. En revanche les graphiques de droite illustrent les caractéristiques de chaque genre dans les résidus, comme par exemple un pic du beta des hommes autour de 20 ans. Ce pic indique que les jeunes hommes meurent plus comparativement à la population totale du Canada, ce qui peut s'expliquer par des accidents de la route plus fréquents.

5.2.2 Choix du modèle grâce au ratio d'explication

Le ratio d'explication mesure à quel point un modèle est efficace et permet donc de choisir le meilleur modèle possible pour estimer les taux de mortalité. On désigne $R_S(i)$, $R_C(i)$ et $R_{AC}(i)$ respectivement les ratios d'explication du modèle LC appliqué individuellement à la $i^{\text{ème}}$ population, du modèle à facteur commun et du modèle à facteur commun augmenté. Ces derniers sont calculés comme suit :

$$R_S(i) = 1 - \frac{\sum_{t=t_0}^{t_M} \sum_{x=x_0}^{x_M} [\ln(m_{x,t,i}) - \alpha_{x,i} - \beta_{x,i} \kappa_{t,i}]^2}{\sum_{t=t_0}^{t_M} \sum_{x=x_0}^{x_M} [\ln(m_{x,t,i}) - \alpha_{x,i}]^2} \quad (8)$$

$$R_C(i) = 1 - \frac{\sum_{t=t_0}^{t_M} \sum_{x=x_0}^{x_M} [\ln(m_{x,t,i}) - \alpha_{x,i} - B_x K_t]^2}{\sum_{t=t_0}^{t_M} \sum_{x=x_0}^{x_M} [\ln(m_{x,t,i}) - \alpha_{x,i}]^2} \quad (9)$$

$$R_{AC}(i) = 1 - \frac{\sum_{t=t_0}^{t_M} \sum_{x=x_0}^{x_M} [\ln(m_{x,t,i}) - \alpha_{x,i} - B_x K_t - \beta_{x,i} \kappa_{t,i}]^2}{\sum_{t=t_0}^{t_M} \sum_{x=x_0}^{x_M} [\ln(m_{x,t,i}) - \alpha_{x,i}]^2} \quad (10)$$

Le numérateur de la seconde partie de chaque ratio d'explication correspond à la somme des carrés des résidus (SCR) du modèle choisi. Le dénominateur est la SCR d'un modèle de référence qui estime les taux de mortalité simplement comme étant la moyenne temporelle, à l'âge x , du logarithme des taux centraux de mortalité. Ainsi plus les résidus du modèle choisi sont faibles, plus le rapport des deux SCR est petit, de sorte que le ratio d'explication se rapproche de 1.

	Homme			Femme		
	R_S	R_C	R_{AC}	R_S	R_C	R_{AC}
Canada	0,9363	0,9258	0,9516	0,9311	0,9127	0,9309
Etats-Unis	0,9456	0,9338	0,9595	0,9499	0,9243	0,9577
Royaume-Uni	0,9379	0,9257	0,9568	0,9318	0,9044	0,9496

Tableau 2 : Ratio d'explication des différents modèles

Comme le soulignent Li et Lee dans leur article [24], le modèle à facteur commun est la moins bonne des trois modélisations car $B_x K_t$ ne minimise pas les erreurs de la population i mais plutôt celles de la population totale ($R_C < R_S$). De plus le facteur

spécifique du modèle à facteur commun augmenté minimise les résidus du modèle à facteur commun pour modéliser de la structure restante propre à chaque population ($R_C < R_{AC}$, sauf pour les femmes canadiennes).

5.2.3 Modélisation des Kappas et prévisions des taux de mortalité futurs

L'intérêt de mettre en place un modèle capable de capturer l'évolution des taux de mortalité historiques est par la suite de pouvoir prédire du mieux possible les taux de mortalité futurs. Cela consiste à modéliser les séries temporelles de Kappas grâce à un modèle ARIMA et d'utiliser les Kappas futurs estimés avec les coefficients $\alpha_{x,i}$, B_x et $\beta_{x,i}$ pour chaque âge. Comme l'illustre la Figure 7, les Kappas ne sont pas stationnaires et doivent être différenciés.

Null Hypothesis: D(SERIES01) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-4.512386	0.0005
Test critical values:		
1% level	-3.536587	
5% level	-2.907660	
10% level	-2.591396	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Tableau 3 : Test ADF sur le Kappa commun différencié

Le test Dickey Fuller augmenté est un test statistique qui vise à savoir si une série temporelle est stationnaire, c'est-à-dire si ses propriétés statistiques varient ou pas dans le temps. D'après le Tableau 3, la p-value est de 0.0005 (très inférieure au seuil de 0.05), on rejette alors l'hypothèse nulle de racine unitaire et on peut conclure que la série des Kappas communs différenciée est stationnaire. Pour compléter la modélisation, on analyse les SAC (Sample AutoCorrelation) ainsi que les SPAC (Sample Partial AutoCorrelation) du Kappa commun et de la série différenciée. A la Figure 8, on constate que la fonction d'autocorrélation du Kappa décroît lentement et que la fonction d'autocorrélation partielle chute brutalement à zéro après le premier lag, ce qui indique qu'un modèle MA n'est pas nécessaire et que Kappa peut être modélisé par un AR(1) ou une marche aléatoire. Concernant la série différenciée, les deux graphiques au bas de la

Figure 8 correspondent à un bruit blanc et renforcent le choix d'une marche aléatoire comme modèle.

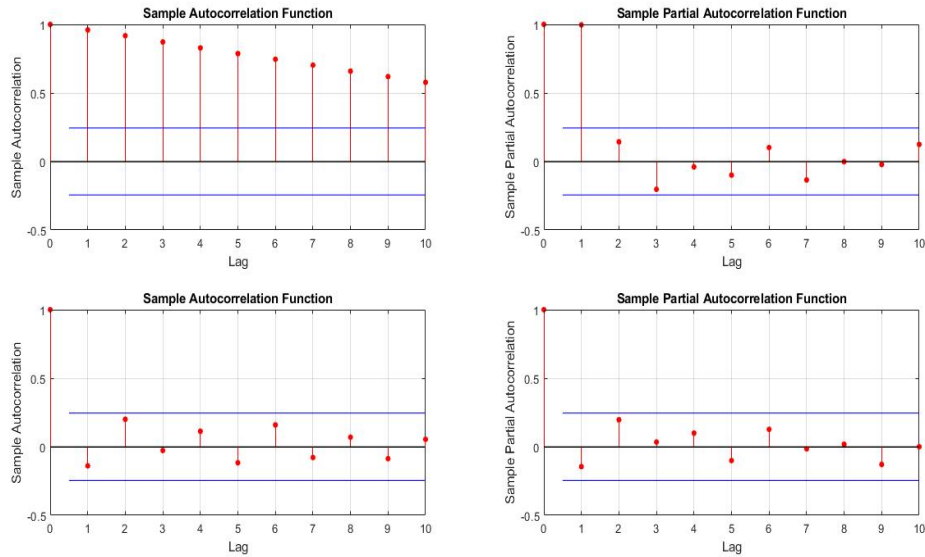


Figure 8 : SAC et SPAC du Kappa commun et de la série différenciée

Modèle ARIMA	(0,1,0)	(1,1,0)	(0,1,1)	(1,1,1)	(2,1,0)	(2,1,1)
AIC (Matlab)	267.9	268.6	269.0	264.4*	268.2	270.1
BIC (Matlab)	270.1	273.0	273.4	271.0	274.8	278.9
AIC (Stata)	269.9	270.6	271.0	269.4	270.3	272.2
BIC (Stata)	274.3	277.2	277.6	278.2	279.1	283.1
AIC (Eviews)	267.9	268.6	269.0	267.4	268.3	270.2
BIC (Eviews)	270.1	273.0	273.4	274.0	274.9	278.9

* Le modèle ARIMA(1,1,1) ayant atteint plusieurs contraintes, Matlab a attribué aux coefficients du AR(1) et du MA(1) respectivement les valeurs par défaut -1 et 1, ce qui tend à diminuer le AIC.

Tableau 4 : AIC et BIC des modèles ARIMA modélisés sur le Kappa commun

Bien que l'on ait déjà une idée de la modélisation à choisir au vu des SAC et SPAC obtenus précédemment, on décide d'estimer plusieurs modèles ARIMA et de juger de leurs performances à l'aide des critères Akaike (AIC) et Bayésien (BIC) qui se définissent de la façon suivante :

$$AIC = 2k - 2 \ln(L)$$

$$BIC = \ln(N) * k - 2 \ln(L)$$

où k est le nombre de paramètres à estimer du modèle, N est le nombre d'observations dans l'échantillon et L est le maximum de la fonction vraisemblance du modèle.

Ces critères mesurent la qualité d'un modèle statistique et permettent de comparer plusieurs modèles sur la base de la somme des résidus au carré et du nombre de paramètres à estimer : plus le critère prend une valeur petite, plus le modèle est performant. Ces critères reposent donc sur un compromis entre la qualité de l'ajustement et la complexité du modèle, en pénalisant les modèles ayant un grand nombre de paramètres, ce qui limite les effets de surajustement (augmenter le nombre de paramètres améliore nécessairement la qualité de l'ajustement). On remarque grâce aux expressions ci-dessus que le critère BIC pénalise davantage que l'AIC l'ajout de variables explicatives à partir de $N=8$ observations ($\ln(8) > 2$). Il permet ainsi d'obtenir des modèles plus parcimonieux. En excluant le modèle ARIMA(1,1,1) pour cause de contraintes activées, la marche aléatoire est meilleure que les autres modèles avec des AIC = 267.9 et BIC = 270.1 sur Matlab. Ce résultat est identique pour le BIC avec Stata et Eviews. Quant au AIC avec Stata (AIC = 269.4) et Eviews (AIC = 267.4), le meilleur modèle est le ARIMA(1,1,1). Toutefois comme l'AIC de la marche aléatoire est relativement proche (respectivement 269.9 et 267.9) et qu'il y a deux paramètres de moins, on peut judicieusement penser que la marche aléatoire est tout aussi bonne. Les utilisations de Eviews et Stata servent essentiellement à diminuer les risques liés à d'éventuelles différences d'estimation entre les logiciels. Dans le cas présent, les trois logiciels donnent la même réponse et confortent encore plus les résultats obtenus. On en conclut donc que le meilleur modèle pour le Kappa commun est la marche aléatoire. Il convient dès lors de vérifier la validité du modèle grâce à certaines caractéristiques des résidus, notamment la présence d'autocorrélations, la normalité et l'homoscédasticité.

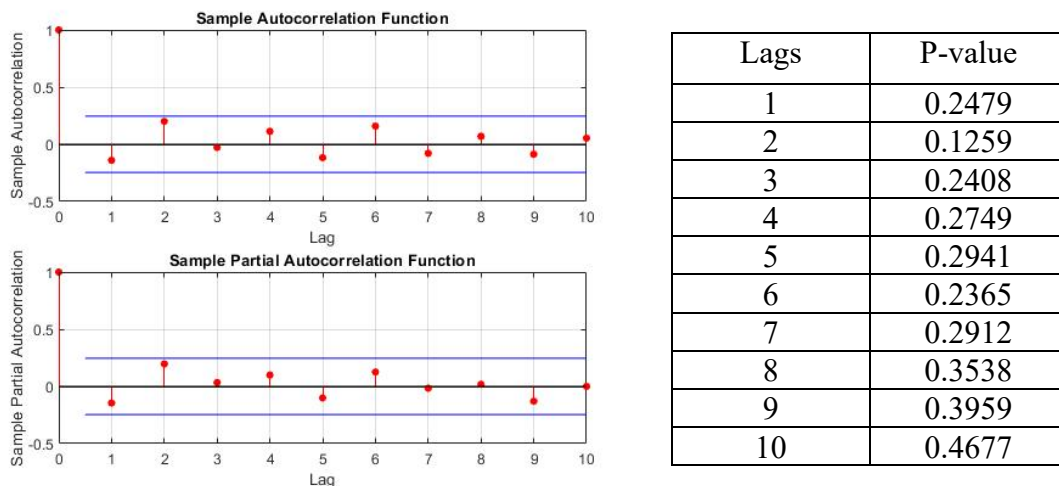


Figure 9 : SAC et SPAC des résidus avec les p-values de chaque lag

La première étape consiste à étudier les p-values du test de Box-Ljung qui sont données ci-dessus pour évaluer l'ampleur des autocorrélations en tant que groupe. En effet, une autocorrélation pourrait être significative, mais si ce n'est qu'un effet du hasard la statistique de Box-Ljung, et donc la p-value, ne réagira pas et nous indiquera que le modèle est adéquat. On teste ici l'hypothèse nulle qui stipule qu'il n'y a pas d'autocorrélations dans les résidus contre l'hypothèse alternative énonçant la présence d'autocorrélations. La Figure 9 illustre l'absence d'autocorrélations (et d'autocorrélations partielles) significatives tout comme les p-values pour les dix premiers lags car elles sont toutes supérieures à 0.05. L'hypothèse nulle n'est donc pas rejetée et les résidus sont aléatoires (bruit blanc).

La seconde étape vise à examiner la normalité des résidus. L'histogramme ci-dessous ainsi que le Q-Q plot semblent indiquer à première vue que les résidus suivent une loi normale. Il convient dès lors de vérifier la normalité grâce au test de Jarque-Bera et au test de Kolmogorov-Smirnov. Le test de Jarque-Bera teste la normalité avec une moyenne et une variance inconnue alors que le test de Kolmogorov-Smirnov teste les données par rapport à une loi normale standard. Dans notre étude, le test de Jarque-Bera ne rejette pas l'hypothèse nulle de la normalité des résidus car la p-value est supérieure au seuil de 0.05. Comme la moyenne des résidus est de $-9.9159e-18$ et la variance est de 3.3426, on doit normaliser les résidus pour effectuer le second test. Bien que le test de Kolmogorov-Smirnov ait tendance à rejeter plus facilement la normalité que d'autres

tests, on constate également que ce test ne rejette pas la normalité des résidus ($p\text{-value} = 0.6871 > 0.05$). On peut dès lors utiliser l'hypothèse que ces résidus suivent une loi normale.

Enfin, le test ARCH permet de supposer l'homoscédasticité des résidus, c'est-à-dire la même variance des erreurs pour chaque observation. La $p\text{-value}$ du test est supérieure à 0.05 et nous permet donc de conclure que les résidus sont homoscédastiques. Après avoir choisi la marche aléatoire pour modéliser le Kappa commun, on prédit ses valeurs futures et on les utilise pour calculer les prévisions des taux de mortalité.

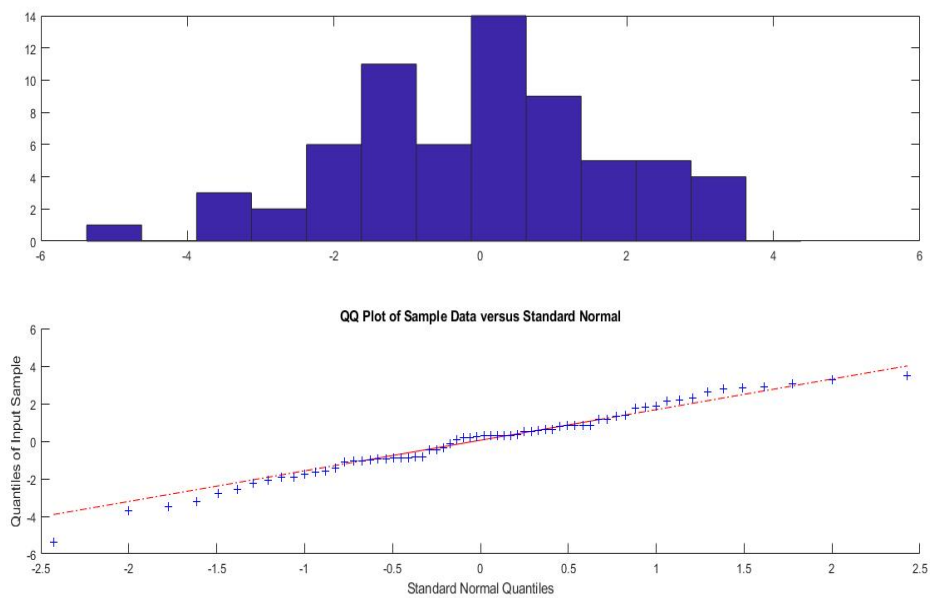


Figure 10 : Histogramme des résidus du Kappa commun et Q-Q plot

A des fins de comparaisons avec les données brutes et les estimations de Statistique Canada [31] seulement disponible à partir de 1981, on a décidé d'appliquer le modèle de Li-Lee à partir de cette date. La Figure 11 permet ainsi de constater que les données brutes de Statistique Canada sont plus lisses que les données de HMD. Ceci s'explique par le fait que les données de Statistiques Canada utilisées ici sont obtenues en faisant la moyenne arithmétique d'une année avec l'année qui précède et l'année qui suit. Autrement dit, le taux de mortalité de 1981 pour l'âge de 65 ans, par exemple, correspond à la moyenne des taux de 1980, 1981 et 1982 pour le même âge. Cette moyenne mobile lisse ainsi la courbe de taux dans le but de faciliter la modélisation des taux de mortalité et fournir des prévisions plus précises. On remarque que les prévisions espérées de

Statistique Canada (en jaune) sont sensiblement les mêmes que les nôtres pour les femmes canadiennes de 65 ans avec les données non lissées de HMD (en violet). Les prévisions avec notre modèle Li-Lee et les données brutes de Statistiques Canada (en vert) sont légèrement plus élevées et l'écart avec les prévisions de Statistique Canada semblent augmenter avec le temps.

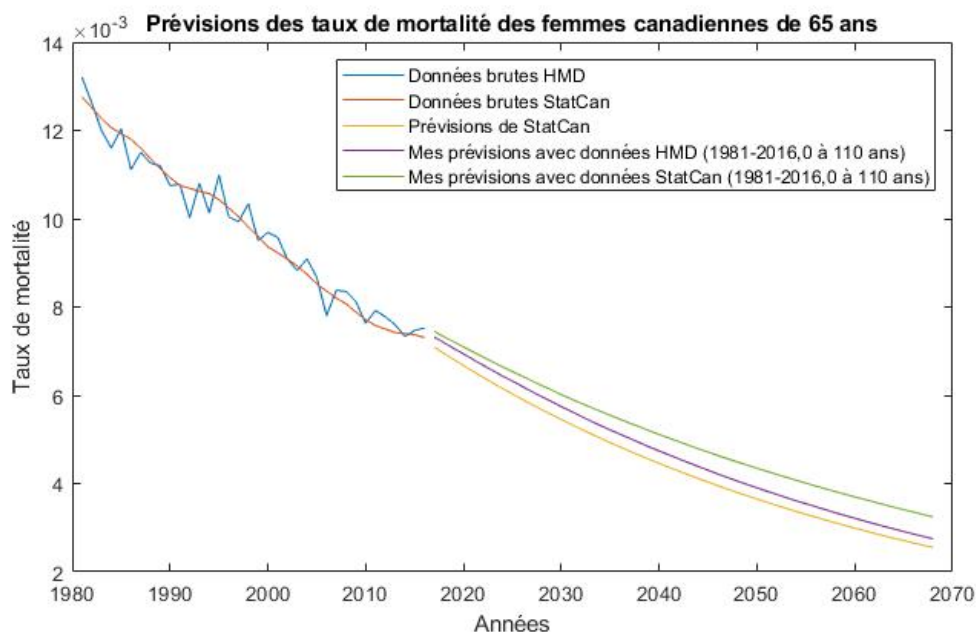


Figure 11 : Taux de mortalité des femmes canadiennes de 65 ans et prévisions espérées

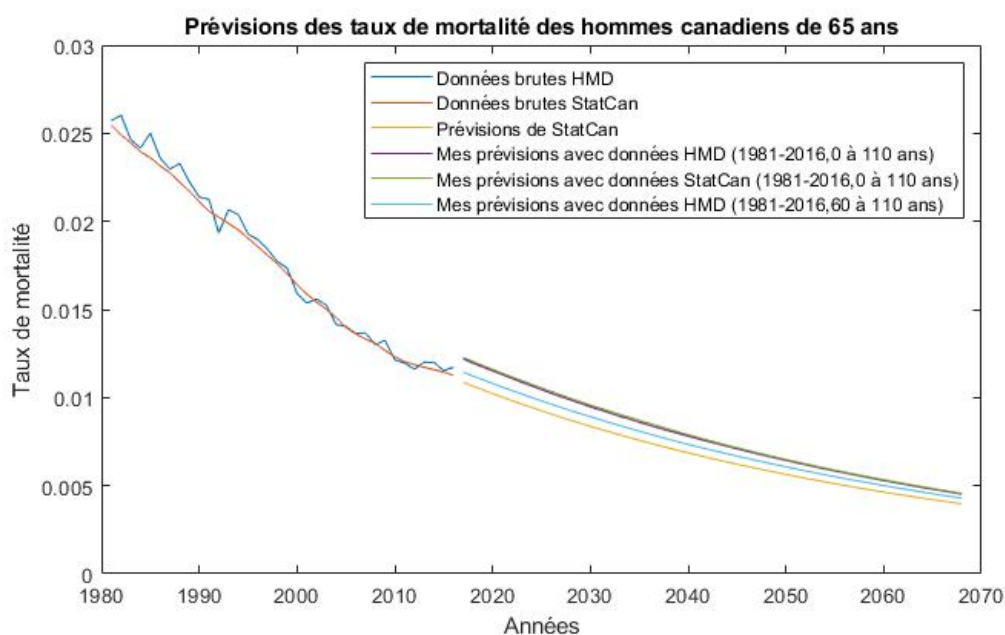


Figure 12 : Taux de mortalité des hommes canadiens de 65 ans et prévisions espérées

Concernant les prévisions avec la population des hommes canadiens (Figure 12), ils sont présentés dans le graphique ci-dessus. A l'instar des femmes canadiennes, on remarque que les prévisions des hommes canadiens sont légèrement surestimées par rapport aux prévisions de Statistique Canada. Toutefois, contrairement aux femmes, les prévisions avec notre modèle sont les mêmes (en violet et vert) quelles que soient les données brutes utilisées (HMD [14] ou Statistique Canada [31]), et l'écart avec les prévisions de Statistique Canada tendent à diminuer avec le temps. De plus les prévisions réalisées avec seulement les données de 60 à 110 ans (en bleu ciel) sont meilleures que celles obtenues en utilisant toute la matrice des âges. Cette amélioration des prévisions peut s'expliquer par l'influence que certaines tranches d'âges plus jeunes peuvent avoir sur l'estimation des paramètres, en particulier la tranche d'âges 20-30 ans. Cette particularité n'est cependant pas visible chez les femmes canadiennes où les prévisions de 60 à 110 ans sont vraiment moins bonnes.

5.3 Modèle de Cairns, Blake et Dowd (CBD) : M5 et M7

5.3.1 Présentation du modèle M5 et M7

Alors que plusieurs modèles se sont inspirés du modèle de référence de Lee-Carter [19], comme le modèle multifactoriel de Booth et al. [4] ou le modèle de Li-Lee [24] traité précédemment, d'autres chercheurs ont tenté de développer leur propre modèle pour sortir du paradigme « Lee-Carter ». Le modèle M5 de Cairns, Blake et Dowd [6] en fait partie et considère les réalisations des probabilités de décès selon la structure suivante :

$$\text{logit}(q_{x,t}) = \log\left(\frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}}\right) = \kappa_1(t) + \kappa_2(t)(x - \bar{x}) + \varepsilon_x(t) \quad (11)$$

où :

\bar{x} est l'âge moyen sur la tranche d'âge de référence,

$\kappa_1(t)$ et $\kappa_2(t)$ sont des paramètres évoluant dans le temps,

$q_{x,t}$ est la probabilité qu'un individu d'un âge x au temps t décèdera entre t et $t+1$, et elle se définit sous l'hypothèse d'uniformité des décès dans l'année par :

$$q_{x,t} = \frac{m_{x,t}}{1 + 0.5m_{x,t}}$$

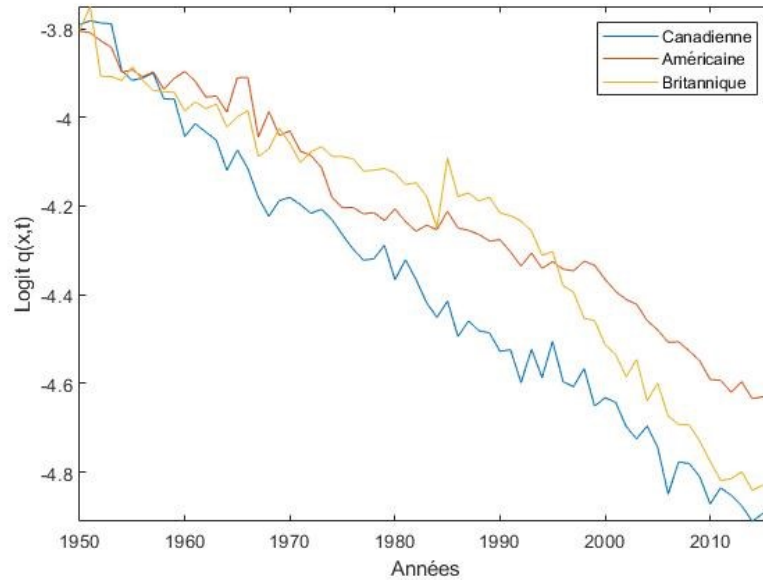


Figure 13 : Logit $q_x(t)$ des femmes de 65 ans pour les trois populations

L'indice (κ_1) représente le niveau général de la courbe de mortalité pour tous les âges et ressemble dans ce sens au Kappa du modèle de Lee-Carter. On en déduit qu'une réduction de ce paramètre implique une réduction globale de la mortalité, affectant les probabilités de décès de la même manière pour tous les âges. L'indice (κ_2) exprime la pente de la courbe de mortalité. Un changement de κ_2 reflète un changement dans la distribution de l'amélioration de la mortalité à travers les âges. Une diminution du paramètre signifie que la mortalité des âges plus avancés (au-dessus de l'âge moyen \bar{x}) s'améliore plus rapidement que pour les plus jeunes âges.

Contrairement au modèle de Lee-Carter, le modèle CBD originel (M5) n'a aucune contrainte sur ses paramètres. De plus, Chan et al. [8] font valoir que le modèle, sur lequel la construction d'indices est basée, respecte la propriété d'invariance des données historiques après l'ajout de nouveaux taux. Ils établissent deux conditions suffisantes pour satisfaire cette propriété. La première condition concerne le log-likelihood du modèle qui s'exprime selon l'expression :

$$l = \sum_{x=x_0}^{x_1} \sum_{t=t_0}^{t_1} D_{x,t} \ln(E_{x,t} m_{x,t}) - E_{x,t} m_{x,t} - \ln(D_{x,t}!) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \lambda(t)$$

où $[x_0, x_1]$ est la tranche d'âge de référence, $[t_0, t_1]$ est la période d'échantillonnage, $D_{x,t}$ est le nombre de décès observé à l'âge x et au temps t , et $E_{x,t}$ est l'exposition, c'est-à-dire le nombre de personnes d'âge x encore en vie susceptible de mourir au cours du temps t . Cette formule dépend bien évidemment du modèle choisi pour calculer les taux de mortalité. Les contributions au log-likelihood de l'année t pour les modèles de LC et CBD M5 s'écrivent alors respectivement :

$$\lambda(t) = \sum_{x=x_0}^{x_1} D_{x,t} (\alpha_x + \beta_x \kappa_t + \ln(E_{x,t})) - E_{x,t} e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t} - \ln(D_{x,t}!)$$

$$\lambda(t) = \sum_{x=x_0}^{x_1} D_{x,t} \ln(E_{x,t} \ln(1 + e^{\kappa_1(t) + \kappa_2(t)(x-\bar{x})})) - E_{x,t} \ln(1 + e^{\kappa_1(t) + \kappa_2(t)(x-\bar{x})}) - \ln(D_{x,t}!)$$

On observe que pour $t \neq s$, $\lambda(t)$ et $\lambda(s)$ contiennent les mêmes paramètres qui dépendent de l'âge dans le modèle LC. Or α_x s'obtient en calculant la valeur moyenne des $\ln(m_{x,t})$ au cours du temps. Ainsi ce paramètre change à chaque fois qu'une année de données est ajoutée dans la modélisation. De ce fait la SVD va également nous donner des β_x et κ_t différents et conduire à des estimés de κ_t avant $t_1 + 1$ qui vont changer au fur et à mesure que l'on ajoute des années de données au processus d'estimation. A l'inverse, il n'y a pas de paramètres du modèle qui sont inclus à la fois dans $\lambda(t)$ et $\lambda(s)$ pour le modèle CBD, autrement dit, étendre la période d'échantillonnage n'affectera pas le maximum de vraisemblance de $\kappa_1(t)$ et $\kappa_2(t)$. Quant à la seconde condition, elle est liée aux contraintes du modèle. Prenons le cas de la deuxième contrainte du modèle de LC avec κ_t . Comme la somme des κ_t doit être égale à zéro, si on ajoute une année supplémentaire alors la contrainte va nécessiter une révision du paramètre κ_t pour être satisfaite, ce qui va impliquer un changement des κ_t originaux. Ce problème est évité avec le modèle M5 parce qu'il n'a pas de telles contraintes sur ses paramètres.

Le modèle M5 n'est certes pas le meilleur modèle en termes de précision de modélisation des taux de mortalité (« goodness of fit »), mais il est le seul à respecter cette propriété d'invariance essentielle pour l'utilisation d'indices. En effet les extensions

de ce modèle, comme M6 ou M7, comprennent un paramètre de cohorte, γ_{t-x} , qui impose des contraintes et qui enlève la propriété d'invariance à ces modèles lorsqu'on estime les paramètres avec la méthode du maximum de vraisemblance. Dans le cas de M7, ces contraintes sont :

$$\sum_{c=c_0}^{c_M} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=c_0}^{c_M} c\gamma_c = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{c=c_0}^{c_M} c^2\gamma_c = 0$$

avec γ_c le paramètre de l'effet cohorte du modèle M7 présenté dans la revue de littérature et c la date de naissance des cohortes (de c_0 à c_M). Il est toutefois possible de modéliser le modèle M7 en OLS comme on va le présenter dans la sous-partie suivante.

5.3.2 Estimation des paramètres des modèles et modélisation des Kappas

Comme le modèle CBD (M5) n'a pas de contraintes, la méthode avec maximum likelihood et la méthode des moindres carrés ordinaires (OLS) donnent des paramètres similaires. La méthode OLS étant plus simple, on l'utilise pour l'estimation des paramètres qui consiste en une régression logistique du taux de mortalité par rapport à l'âge de l'individu. On considère que les coefficients de la régression sur l'âge sont stochastiques. Une fois les paramètres κ_1 et κ_2 obtenus avec OLS, il convient de modéliser cette série temporelle avec une marche aléatoire bivariée comme le font Cairns et al. [6]. On obtient des AIC et BIC de -765.51 et -761.85 respectivement alors que ces deux statistiques ne sont que de -756.05 et -745.08 pour un modèle VAR(1) par exemple. Les résultats présentés ci-dessous proviennent du modèle M5 appliqué sur la population des femmes canadiennes avec une tranche d'âges allant de 65 à 99 ans et sur la période 1970-2016. Le choix de la tranche d'âge se justifie par la nécessité d'avoir des prévisions de taux de mortalité de plus de 30 ans (en l'occurrence 35 ans) pour la tarification et la couverture sur 30 ans. Concernant la période d'étude, on remarque que les résultats sur les trois populations de femmes (Canada, Etats-Unis et Royaume-Uni) sont bons sur la même période que Li-Lee (1950-2016). En revanche, les trois populations d'hommes ne permettent pas de bons « fits », en particulier dû aux taux de mortalité relativement constant de 1950 à 1970, ce qui conduit à une moins bonne modélisation des kappas. De plus la dynamique des taux de mortalité tend à évoluer avec les sociétés et la prise en

compte de ces vingt ans de données fausseraient quelque peu la modélisation. Les quarante-sept années restantes sont amplement suffisantes et certainement plus représentatives.

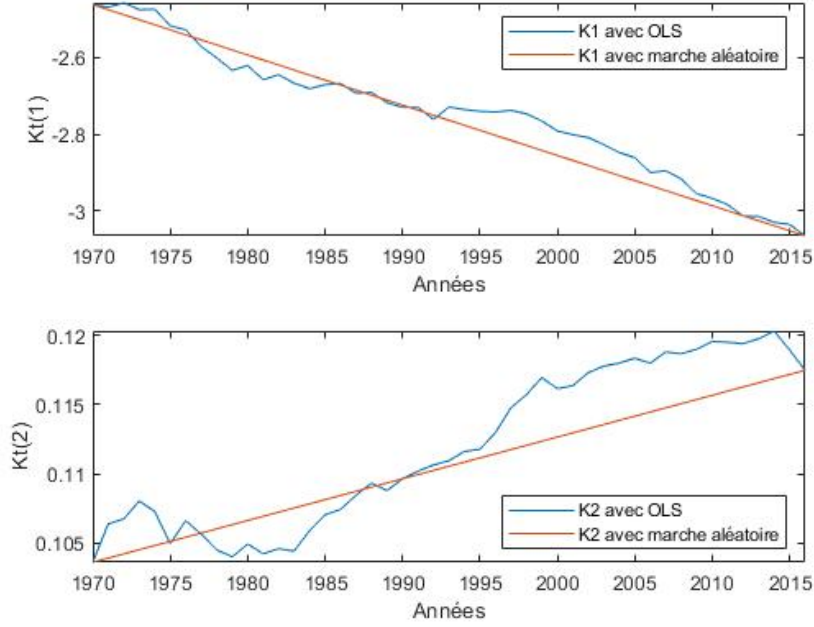


Figure 14 : Kappas du modèle M5 pour les femmes canadiennes

La distribution future de $\kappa(t) = (\kappa_1(t), \kappa_2(t))'$ sera ainsi modélisée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \kappa(t+1) &= \kappa(t) + \mu + CZ(t+1) \\ \begin{pmatrix} \kappa_1(t+1) \\ \kappa_2(t+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \kappa_1(t) \\ \kappa_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(t+1) \\ Z_2(t+1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

où μ est un vecteur constant 2×1 , C est une matrice 2×2 qui s'obtient de la matrice variance-covariance de $\kappa_1(t)$ et $\kappa_2(t)$, et $Z(t)$ est un vecteur 2×1 de variables indépendantes provenant d'une loi normale standard. On dénote V , la matrice variance-covariance de $\kappa_1(t)$ et $\kappa_2(t)$. Il existe une infinité de matrice qui satisfont $V = CC'$. Les auteurs contraignent C à être une matrice triangulaire supérieure, ainsi la matrice C est unique et elle est appelée la décomposition de Cholesky. On obtient les coefficients suivants avec la population des femmes canadiennes :

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} -0.0132 \\ 0.000301 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{V} = \hat{C}\hat{C}' = \begin{pmatrix} 0.00131 & 0.0000671 \\ 0.0000671 & 0.00000516 \end{pmatrix}.$$

Tout comme avec le modèle Li-Lee, on a comparé les paramètres de M5 avec ceux obtenus par Statistique Canada. La Figure 15 ci-dessous montre que la modélisation de κ_1 est semblable, que ce soit avec les données de HMD ou celles de Statistique Canada. Leurs κ_1 estimés sont légèrement plus faibles mais ils ont une évolution parallèle. Quant aux différences obtenues pour κ_2 , elles paraissent amplifiées par l'échelle plus petite du graphique, mais encore une fois l'évolution générale reste sensiblement la même et tourne autour des mêmes valeurs.

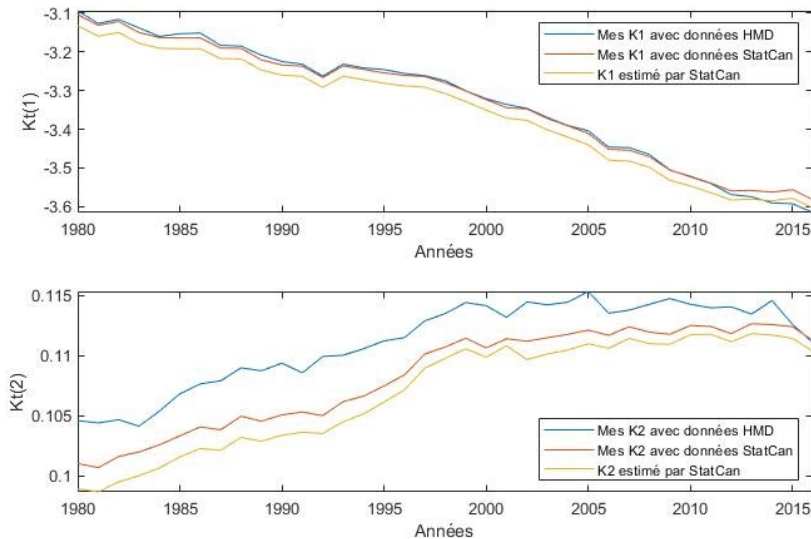


Figure 15 : Comparaison des Kappas du modèle M5 avec Statistique Canada

Concernant les paramètres du modèle M7, l'estimation se fait généralement avec la méthode du maximum de vraisemblance. Toutefois Cairns et al. [7] indiquent qu'il y a des contraintes d'identifiabilité à respecter qui empêchent de garder la propriété d'invariance. De plus, cette méthode donne des paramètres Kappas et Gamma qui oscillent beaucoup et qui sont difficilement modélisables avec des modèles VARIMA. Pour remédier à ces problèmes, il est possible d'utiliser une méthode approximative avec OLS. Il suffit d'estimer dans un premier temps les trois paramètres Kappas à l'aide d'une régression multiple, comme avec M5 à la différence qu'on y inclut un paramètre supplémentaire pour l'effet quadratique κ_3 . Puis, on estime le paramètre Gamma sur les

résidus en réalisant une seconde régression linéaire simple cette fois. Ces quatre paramètres sont présentés sur la Figure 16.

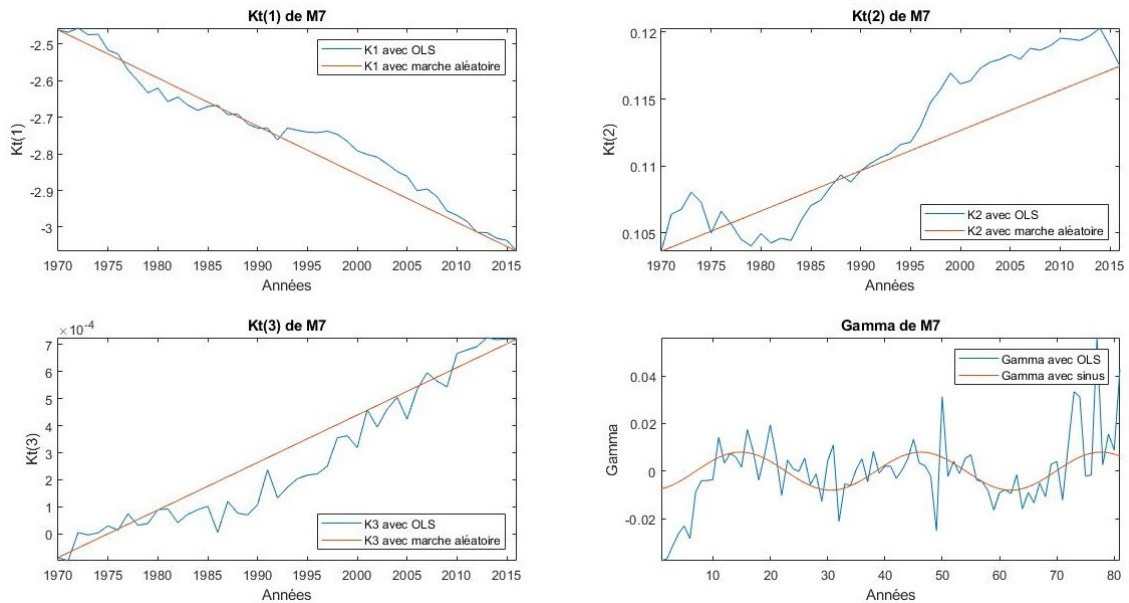


Figure 16 : Kappas et Gamma du modèle M7 pour les femmes canadiennes

Cette approche est privilégiée dans notre étude pour une raison essentielle. Comme on peut le voir sur la Figure 16, les trois Kappas estimés sont plutôt linéaires et se modélisent facilement avec une marche aléatoire « trivariée », dans le même ordre d'idée que la marche aléatoire bivariée avec M5. Quant au paramètre Gamma, on constate que même sans prendre en compte les contraintes, ils sont autour de zéro comme un bruit blanc mais avec une légère forme sinusoïdale. Cela signifie qu'il reste un peu de structure dans les résidus mais que les Kappas modélisent à eux seuls déjà très bien les taux de mortalité. La fenêtre d'étude de 1970 à 2016 est sans doute la cause d'un effet cohorte aussi peu prononcé puisqu'il n'y a pas vraiment eu d'événements majeurs, comme une guerre, affectant les taux de mortalité pour des générations et sexes spécifiques sur cette période. Le paramètre Gamma est alors modélisé par la fonction sinus, que l'on retrouve parfois pour modéliser la saisonnalité dans le prix du blé ou de l'électricité, bien qu'il apporte peu dans la modélisation des taux. De plus, le modèle M7 modélise mieux les taux de mortalité que le modèle M5. Le Tableau 5 énumère quelques critères de sélection du modèle.

Modèles	M5	M7
Maximum log-likelihood	-12 047	-9 604.4
Nombre de paramètres (k)	94	222
Nombre d'observations (N)	1 645	1 645
AIC	24 282	19 653
BIC	24 790	20 853
MSE	0.0328	0.0394
MAPE	0.0369	0.0263

Tableau 5 : Critères de sélection entre M5 et M7

A l'instar de Cairns et al. [7], le BIC du modèle M7 est meilleur que celui du modèle M5, de même que le maximum log-likelihood, le AIC et le MAPE (Mean Absolute Percentage Error) qui se définit, en s'inspirant de Tan et al. [32], par :

$$MAPE = \frac{1}{47 * 35} \sum_{t=1}^{47} \sum_{x=65}^{99} \left| \frac{m_{x+t,1969+t} - \hat{m}_{x+t,1969+t}}{m_{x+t,1969+t}} \right|$$

où $m_{x,t}$ est le taux de mortalité de HMD et $\hat{m}_{x,t}$ est le taux de mortalité estimé avec le modèle. Comme on l'a vu précédemment, les taux de mortalité $m_{x,t}$ et les probabilités de décès $q_{x,t}$ sont certes liés par une formule mais ils donnent des valeurs très proches (c'est-à-dire que $m_{x,t} \approx q_{x,t}$). Ainsi les résultats avec $q_{x,t}$ donneraient sensiblement la même chose. Le choix d'incorporer le MAPE dans les critères provient du résultat des MSE qui semble indiquer que M5 serait meilleur. Or en analysant les résidus, on s'aperçoit que les âges avancés affectent plus les MSE. En effet, si on considère l'âge de 99 ans, les taux sont naturellement plus élevés que ceux de 65 ans, ce qui conduit à des erreurs plus élevées. On constate par exemple que les MSE sans l'âge de 99 ans sont de 0.0274 et 0.0234 respectivement pour les modèles M5 et M7. Cette tranche d'âge représente à elle seule 40 % des MSE de M7. Ainsi sans cet âge de 99 ans, M7 est meilleur que M5.

6. Portefeuille d'annuités et ajustement pour le risque

Dans cette partie, nous introduirons un portefeuille synthétique simple cohorte pour lequel différents scénarios seront réalisés avec des simulations de Monte Carlo. Ce type de portefeuille est le plus simple qu'il soit possible de construire et va nous permettre de mieux appréhender les effets des produits de couverture. Le portefeuille multiples cohortes reflète davantage la réalité et sera détaillé dans la section subséquente. Il est toutefois nécessaire de poser quelques hypothèses raisonnables sur la construction du portefeuille simple cohorte afin de bien évaluer l'efficacité des produits dérivés. Ce portefeuille est constitué de 4000 annuitants dont les rentes sont vendues par un assureur à la cohorte des femmes canadiennes âgées de 65 ans et dont les décès arrivent avant l'âge maximal de 99 ans. Les individus de cette cohorte reçoivent un montant de 1\$ chaque année jusqu'à leur décès. Le taux sans risque utilisé est constant à 4%.

6.1 Obligation de longévité

Avant de tarifier les annuités de notre portefeuille, nous introduisons le prix de l'obligation de longévité EIB [6]. Cette obligation fut émise en Novembre 2004 par la Banque Européenne d'Investissement (EIB) en partenariat avec BNP Paribas avec une maturité de 25 ans. Bien qu'elle fut mal accueillie par les investisseurs et n'ait pas généré assez de demande, conduisant à un manque de liquidité, elle a cependant suscité l'intérêt du public. Son aspect novateur était de lier les paiements de coupon à un indice de survie pour la cohorte des hommes anglais et gallois âgés de 65 ans en 2002. Sachant que le coupon initial fut établi à £50 millions, l'obligation devrait payer un coupon de £50 millions $\times S(t)$, avec $S(t)$ l'indice de survie défini par $S(t) = \prod_{s=1}^t S(s) = \exp(-\sum_{s=1}^t m_{2002+s,64+s})$. La valeur de l'obligation est alors évaluée par :

$$V(0) = \sum_{t=1}^T B_0(t) e^{\delta t} E_0^P \left[e^{-\int_0^t m_x(v) dv} \right] \quad (13)$$

où :

δ est la prime de risque,

$B_0(t)$ est le facteur d'actualisation pour la période de 0 à t ,

$E_0^P \left[e^{-\int_0^t m_x(v)dv} \right]$ est le meilleur estimé de la survie au moment t .

Selon la Banque d'Investissement Européenne et BNP Paribas, les investisseurs seraient prêts à payer une prime de 20 points de base pour couvrir leur risque de longévité. Tout comme Cairns et al. [6] et l'ensemble de la littérature académique sur le sujet, nous décidons de garder la même prime de risque, c'est-à-dire $\delta = 0.002$. Il faut toutefois rester prudent car l'obligation EIB n'a pas été transigée sur le marché financier. D'ailleurs elle n'est pas la seule à avoir connu des difficultés liées à un manque de liquidité. En Décembre 2003, Swiss Re a émis une obligation catastrophe de mortalité à échéance de trois ans pour aider à réduire l'exposition d'une détérioration importante de la mortalité, mais le rapport annuel de 2004 soulignait la difficulté de trouver des contreparties intéressées au transfert du risque. Il est dès lors primordial d'établir la valeur d'une obligation en utilisant une approche ajustée pour le risque afin de donner plus de pertinence aux résultats qui vont suivre pour les praticiens qui doivent évaluer le coût des couvertures. La valeur de l'obligation ajustée pour le risque s'écrit :

$$V_\lambda(0) = \sum_{t=1}^T B_0(t) E_0^Q \left[e^{-\int_0^t m_x(v)dv} \right] \quad (14)$$

La section suivante va traiter de trois façons différentes de calculer la valeur de l'obligation en ajustant pour le risque. L'idée générale consiste à calculer la valeur de l'obligation avec la Formule (13) qui n'est autre que le prix que demanderait EIB et BNP Paribas pour cette obligation, puis d'utiliser ce prix pour déterminer la valeur de la prime de risque du marché. Pour cela, il suffit simplement que les valeurs des obligations des Formules (13) et (14) soient égales.

6.2 Calibration pour le risque

Nous présentons dans ces trois sous-parties les résultats des différentes méthodes d'ajustement pour le risque, appliqués à la population des femmes canadiennes avec le

modèle CBD (M5). La valeur de l'obligation EIB/BNP Paribas est évaluée à 14.37 \$ au temps t_0 en utilisant la Formule (13) et arrondi à deux décimales près. On va voir que les trois méthodes d'ajustement pour le risque nous donnent bien le même prix que l'obligation EIB, soit 14.37 \$.

6.2.1 Transformée de Wang

La Transformée de Wang [10] [37] est la première méthode qui va nous permettre d'ajuster pour le risque. Cette méthode est un cas particulier de mesure de risque obtenue par distorsion. De façon générale, on considère une variable aléatoire X ayant pour fonction de répartition $F_X(x) = P_X(X \leq x)$ et pour fonction de survie $S_X(x) = 1 - F_X(x)$. L'opérateur de distorsion g transforme alors la distribution de X en opérant sur sa fonction de survie pour obtenir une nouvelle distribution $g(S_X(x))$. Afin de proposer un cadre unifié de valorisation d'actifs financiers et de contrats d'assurance, Wang va introduire un opérateur de distorsion qu'on appelle opérateur de Wang (ou Transformée de Wang). Cette Transformée de Wang s'exprime de la façon suivante :

$$F_\lambda^Q(x) = \Phi(\Phi^{-1}(F^P(x)) + \lambda) \quad (15)$$

où :

F^P est la fonction de répartition des probabilités de décès dans la mesure de probabilité réelle,

F_λ^Q est la fonction de répartition déformée (ou ajustée) des probabilités de décès,

Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard,

λ est la prime de risque du marché qui reflète la compensation exigée pour le niveau de risque de longévité.

Après avoir calculé la nouvelle distribution des probabilités de décès F_λ^Q en fonction de la prime de risque du marché, les survies ajustées pour le risque peuvent alors s'écrire $S_\lambda^Q = 1 - F_\lambda^Q$. En remplaçant $E_0^Q \left[e^{-\int_0^t m_x(v) dv} \right]$ de la Formule (14) par les survies ajustées S_λ^Q , on trouve finalement que la valeur de l'obligation ajustée pour le risque $V_\lambda(0)$ est la même que la valeur $V(0)$ que demanderait EIB/BNP Paribas avec la prime λ . En pratique, la méthode avec la Transformée de Wang consiste à trouver la prime de risque

λ en minimisant l'écart entre le prix EIB/BNP et le prix obtenu avec les taux de survie S_λ^Q ajusté avec λ . Dans notre cas, cette minimisation nous donne une prime de risque $\lambda = -0.0882$.

6.2.2 Evaluation Canonique

Contrairement à la Transformée de Wang qui ajuste directement les survies obtenues avec l'espérance des probabilités de décès, le principe de l'évaluation canonique [23] tire ses fondements de la divergence de Kullback-Leibler [17], une méthode visant à redistribuer la probabilité de chaque scénario. Du fait d'un manque de liquidité, le marché est considéré comme incomplet, ce qui se traduit par une infinité de distributions de probabilités possibles. La solution unique est alors obtenue en minimisant le critère d'information de Kullback-Leibler (l'entropie), c'est-à-dire les hypothèses qui remplacent les informations manquantes, défini par :

$$D(Q, P) = \mathbb{E}^Q \left[\frac{dQ}{dP} \ln \frac{dQ}{dP} \right]$$

La divergence de Kullback-Leibler, illustrée par l'équation ci-dessus, est simplement l'espérance de la différence des logarithmes des deux distributions de probabilités, P et Q, en prenant la probabilité P pour calculer l'espérance.

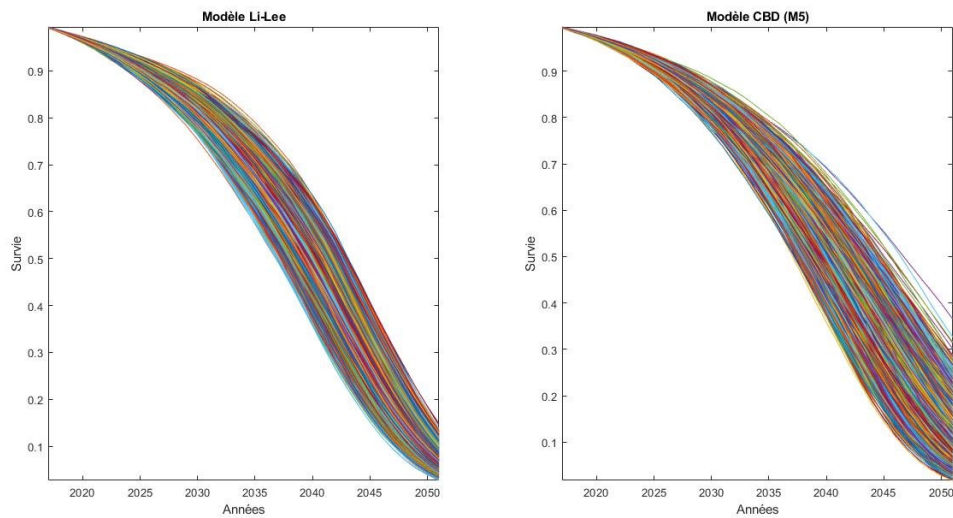


Figure 17 : Simulations avec le modèle Li-Lee et le modèle CBD (M5)

Dans ce mémoire, l'implantation de cette méthode implique deux étapes. La première consiste à générer un nombre, disons $N=10\,000$, de scénarios de mortalité équiprobables avec les modèles de Li-Lee, M5 ou M7. Pour chaque scénario, on se sert des taux de mortalité prédit pour calculer la valeur de l'indice de longévité $S(t, \omega_i)$ au temps t dans le $i^{\text{ème}}$ scénario, puis on détermine la valeur de l'obligation en actualisant les flux monétaires au temps t_0 avec le taux sans risque pour obtenir :

$$v(\omega_i) = \sum_{t=1}^T B_0(t) S(t, \omega_i)$$

Dans la mesure de probabilité réelle P , la probabilité d'avoir un payoff actualisé de $v(\omega_i)$ provenant de l'obligation de longévité est $\pi_i = 1/N$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Dans la prochaine étape, on dénote π_i^* la probabilité associée avec $v(\omega_i)$ sous la nouvelle mesure de probabilité Q . L'espérance des $v(\omega_i)$ doit être égale à la valeur de l'obligation EIB et la somme des nouvelles probabilités doit valoir un. Il reste alors à minimiser le critère d'information de Kullback-Leibler sous ces deux contraintes avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La fonction de Lagrange et les deux contraintes à satisfaire sont les suivantes :

$$L = \sum_{i=1}^N \pi_i^* \ln(\pi_i^*) - \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^N \pi_i^* - 1 \right) - \lambda_1 \sum_{i=1}^N (v(\omega_i) \pi_i^* - V(0))$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^N v(\omega_i) \pi_i^* = V(0) \text{ et } \sum_{i=1}^N \pi_i^* = 1$$

L'unique mesure canonique Q doit également satisfaire la condition de premier ordre suivante :

$$\ln(\pi_i^*) + 1 - \lambda_0 - \lambda_1 v(\omega_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

et qui équivaut à

$$\pi_i^* = \exp(\lambda_0 + \lambda_1 v(\omega_i) - 1), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ce qui signifie que π_i^* est proportionnel à $\exp(\lambda_1 v(\omega_i))$. Ainsi il découle de la deuxième contrainte que :

$$\pi_i^* = \frac{\exp(\lambda_1 v(\omega_i))}{\sum_{i=1}^N \exp(\lambda_1 v(\omega_i))}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

et qu'on peut trouver λ_1 selon l'expression suivante :

$$\lambda_1 = \arg \min \sum_{i=1}^N \exp(\gamma(v(\omega_i)) - V(0)) \quad (17)$$

Il ne reste plus qu'à remplacer λ_1 pour trouver les différentes probabilités π_i^* (Formule (16)) qui nous serviront à calculer la valeur de l'obligation pour chacun des scénarios. On vérifie alors que la somme des N valeurs de l'obligation est égale à l'obligation EIB, autrement dit que :

$$V_\lambda(0) = \sum_{i=1}^N v(\omega_i) \pi_i^* = V(0) \quad (18)$$

En pratique, on va utiliser une fonction de minimisation comme avec la Transformée de Wang pour trouver la prime de risque dénotée λ_1 et ainsi obtenir les probabilités π_i^* que l'on attribue à chaque scénario. La prime de risque varie entre 2.85 et 3.05 dépendamment des scénarios et des innovations qui suivent une loi normale standard appliqués aux prévisions. La Figure 18 ci-dessous illustre les probabilités ajustées avec l'évaluation canonique pour chaque scénario.

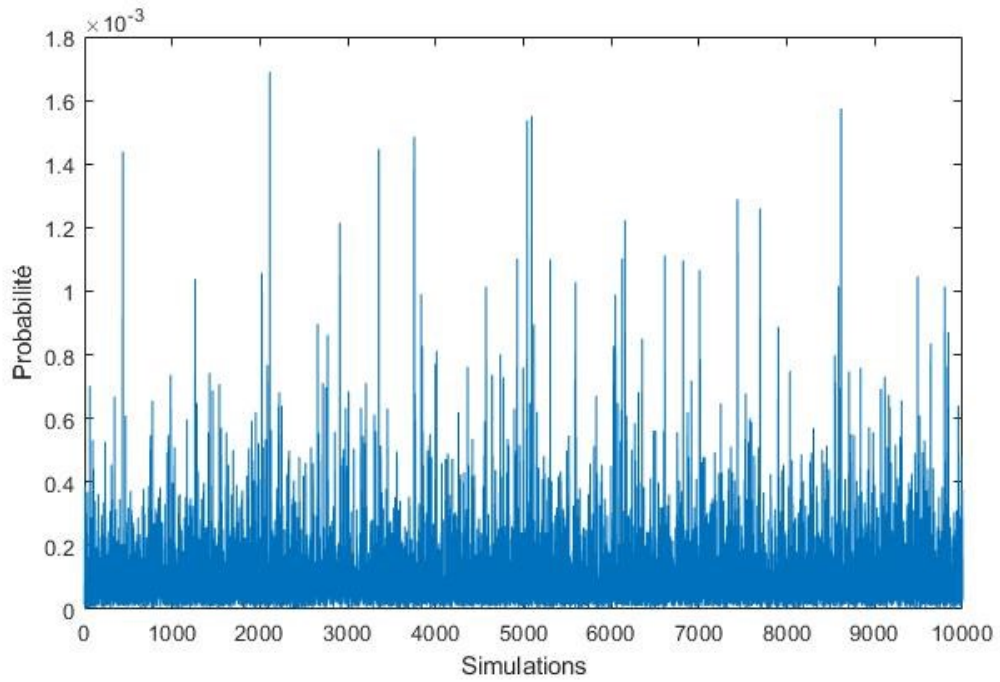


Figure 18 : Distribution de probabilités dans la mesure canonique Q_0

6.2.3 Modèle à deux facteurs ajusté pour le risque

A l'instar de la première méthode avec la Transformée de Wang, le modèle à deux facteurs [23], qui n'est autre que le modèle M5 [6], est ajusté pour le risque directement sur les survies via les paramètres Kappas. Comme nous l'avons expliqué précédemment, la série temporelle $\kappa(t) = (\kappa_1(t), \kappa_2(t))'$ suit une marche aléatoire bivariée avec constante dans la mesure de probabilité réelle P :

$$\kappa(t + 1) = \kappa(t) + \mu + CZ(t + 1)$$

Bien que les deux indices de mortalité, κ_1 et κ_2 , aient leur propre signification, il est important de les considérer ensemble pour se rendre compte de leurs impacts sur l'exposition du risque de longévité sur le portefeuille. Par exemple si on considère un fonds de pension fermé, leurs obligations financières présentent une relation négative avec l'évolution de la mortalité future aux âges avancés. Autrement dit, les versements du fonds de pension sont plus nombreux si la diminution des taux de mortalité est plus élevée qu'attendu, ce qui arrive quand $\kappa_1(t)$ est plus petit que prévu. Parallèlement si la diminution de la mortalité est plus concentrée aux âges avancés ($\kappa_2(t)$ plus petit que prévu), alors le problème du fonds de pension fermé aux nouveaux entrants serait encore

pire. A présent, si on considère une compagnie d'assurance-vie qui se concentre sur les assurances-vie temporaire (généralement vendu aux jeunes), alors leurs obligations financières présentent une relation positive avec l'évolution des taux de mortalité des jeunes âges. En effet, les compagnies d'assurance payent plus lorsque la valeur future des $\kappa_1(t)$ est plus grande que prévue. De même qu'avec les fonds de pension, si la diminution de la mortalité est plus concentrée aux âges avancés, la compagnie d'assurance sera doublement touchée par l'évolution défavorable des paramètres κ_1 et κ_2 . La Figure 19 ci-dessous, prise dans Cairns et al. [6], illustre bien l'exposition au risque de κ_1 et κ_2 pour les deux situations énumérées à l'instant.

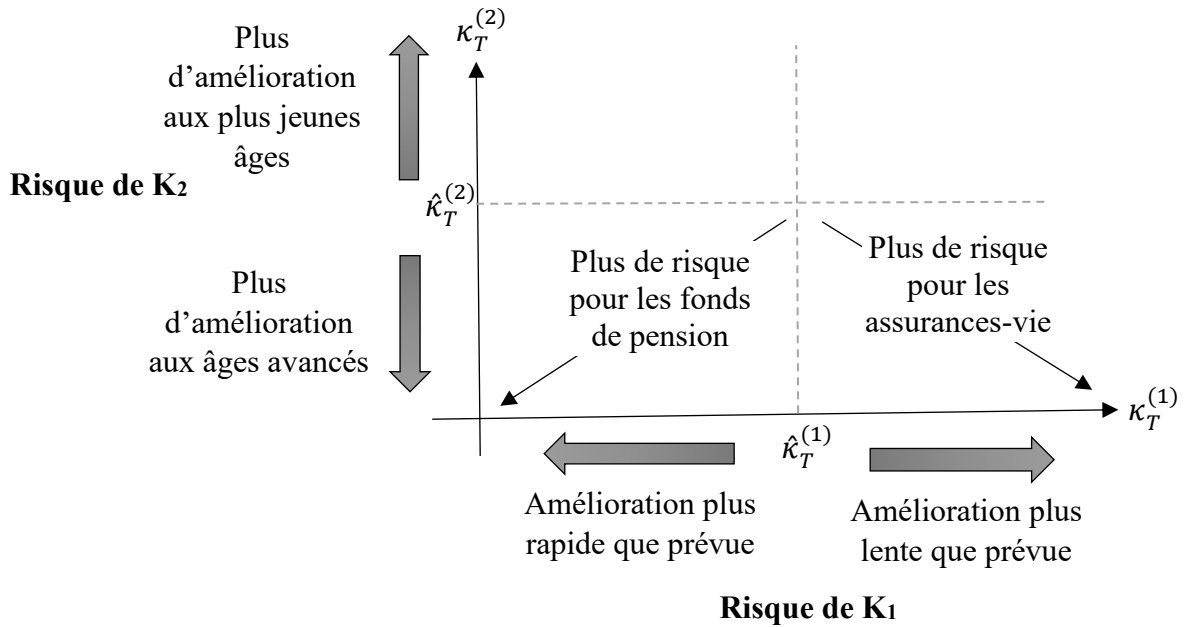


Figure 19 : Exposition du risque de κ_1 et κ_2

Or dans la mesure Q ajustée pour le risque, le processus stochastique de $\kappa(t)$ a la forme suivante :

$$\kappa(t+1) = \kappa(t) + \tilde{\mu} + C\tilde{Z}(t+1) \quad (19)$$

où $\tilde{\mu} = \mu - C\lambda$, $\tilde{Z}(t+1)$ est un vecteur 2×1 de variables indépendantes provenant d'une loi normale standard et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)'$ est un vecteur de prime de risque. De la même façon que les deux méthodes précédentes, on cherche les primes de risque λ_1 et λ_2 telles que la

valeur de l'obligation EIB soit égale à la valeur de l'obligation obtenue avec le modèle ajusté. Il est toutefois nécessaire de poser deux hypothèses sur ces primes. Bien qu'elles puissent varier dans le temps, nous supposons d'abord qu'elles sont constantes sur la période d'étude par soucis de simplicité et par manque de données relatives aux prix du marché. La seconde hypothèse découle de la présence de deux primes de risque contrairement aux deux autres méthodes. En effet il y a deux inconnues (λ_1 et λ_2) pour une seule équation ($V_\lambda(0) = V(0)$), ce qui signifie qu'il y a une infinité de combinaisons possible pour λ_1 et λ_2 pour que les deux valeurs de l'obligation concordent. C'est pour cette raison que l'on considère le cas particulier où $\lambda_1 = \lambda_2$ comme Li et Ng [23]. On notera que le choix des valeurs de λ_1 et λ_2 peut être l'objet d'une étude plus approfondie, en particulier sur l'hypothèse selon laquelle on pourrait attribuer à ces deux primes de risque des poids proportionnels à la contribution de chacun des paramètres aux taux de mortalité estimés. Autrement dit, comme κ_1 est le niveau général de mortalité et contribue marginalement bien plus que κ_2 qui représente la pente de la courbe (Figure 20), alors il serait pertinent de penser que l'ajustement sur κ_1 devrait être plus important que sur κ_2 .

Il suffit finalement de vérifier si les deux prix sont égaux en calculant la valeur de l'obligation ajustée. On utilise pour cela les taux de mortalité modélisés avec les Kappas ajustés pour obtenir des survies qui seront plus élevées que les survies obtenues sans ajustement.

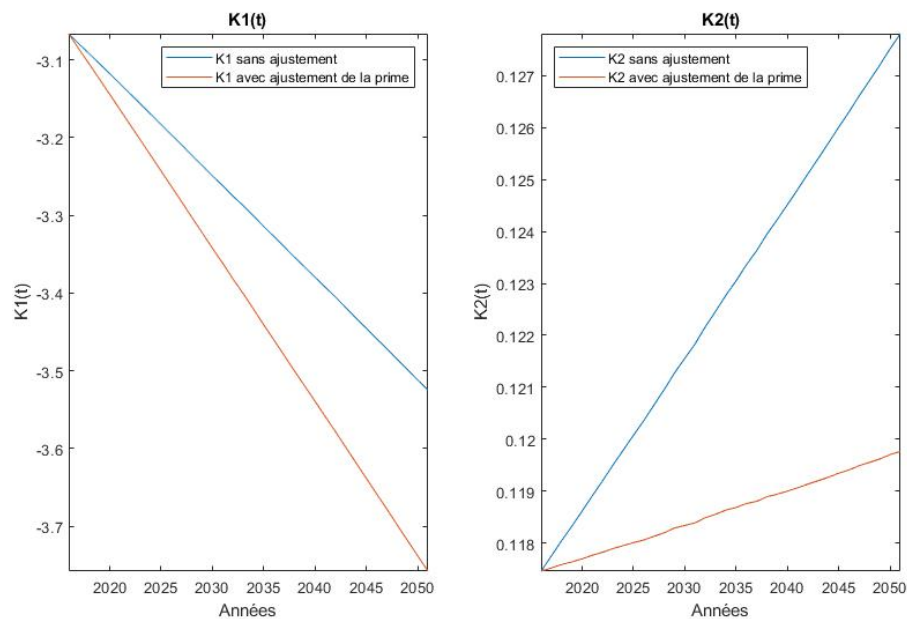


Figure 20 : Prévisions des Kappas avec et sans prime de risque λ

La Figure 20 ci-dessus illustre la différence causée par la prime de risque sur les Kappas. Le modèle à deux facteurs estime les primes de risque, λ_1 et λ_2 , autour de 0.185. L'ajustement tire les valeurs des Kappas vers le bas, de sorte que les taux de mortalité calculés soient plus bas et donc que les taux de survie soient plus élevés. Ces primes de risque peuvent compenser en partie la possibilité d'avoir des taux de mortalité plus faibles que prévu puisque les modèles de taux de mortalité ont historiquement tendance à surestimer la mortalité (ou sous-estimer les progrès de l'espérance de vie). Nous verrons dans une partie subséquente traitant des K-Forwards que ces primes compensent également le risque de l'investisseur et permettent ainsi la couverture du portefeuille en kappa.

6.2.4 Comparaison de l'évolution des primes de risque annuelles obtenues avec les trois méthodes de tarification

On peut également calculer les primes de risque pour les obligations de longévité avec des maturités allant de 1 à 35 ans en utilisant les trois méthodes (Annexe 4). On peut ainsi aisément comparer l'évolution des primes de risque à travers le temps et constater sur la Figure 21 qu'elles sont égales lorsque la maturité est celle de l'obligation EIB/BNP Paribas [23]. La Transformée de Wang semble donner des primes de risque assez linéaires et plus élevées alors que l'évaluation canonique et le modèle à deux facteurs ont initialement de petites primes qui tendent à augmenter de façon exponentielle jusque la maturité de 35 ans. On notera également que les résultats obtenus avec les périodes 1960-2016 et 1980-2016 ne changent pas significativement quelle que soit la méthode (Annexe 5 pour l'évaluation canonique), ce qui vérifie la robustesse des primes obtenues.

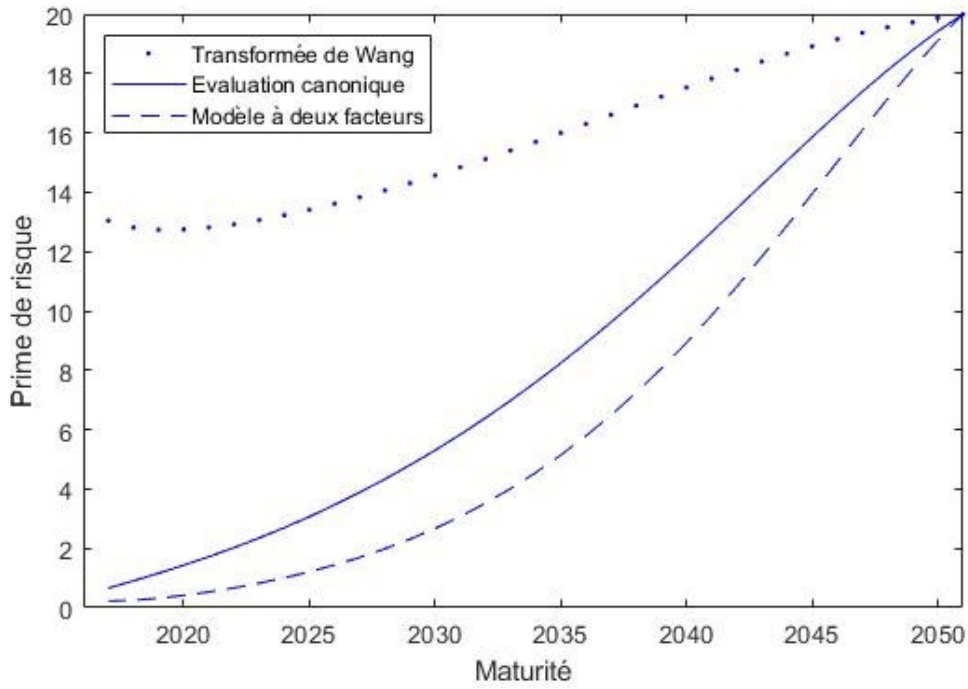


Figure 21 : Primes de risque annuelles estimées avec différentes méthodes de tarification

6.3 Construction du portefeuille d'annuités et distribution des Surplus

Dès lors que la valeur d'une obligation est fixée, il est possible de construire un portefeuille d'annuités synthétique et d'évaluer ses surplus suivants différents scénarios. Rappelons brièvement le fonctionnement d'une rente viagère. Les fonds de pension ou compagnies d'assurance offrent la possibilité à des rentiers de payer un montant d'argent aujourd'hui (t_0) en échange duquel ils recevront un montant annuel fixe de la retraite jusqu'à leur décès. On a supposé dans l'introduction de cette partie que cette annuité fixe est de 1\$ payable à la fin de l'année si la femme a survécu, et que l'âge maximal est de 99 ans. L'annuité pour une cohorte âgée de x années a donc une valeur à t_0 de :

$$a_x = \sum_{t=1}^{99-x} B_0(t) \tilde{S}_x(t) \quad (20)$$

où $B_0(t)$ est le facteur d'actualisation au temps t et $\tilde{S}_x(t) \left(= E_0^Q \left[e^{-\int_0^t m_x(v) dv} \right] \right)$ est l'espérance du taux de survie ajustée pour le risque. L'actif total du portefeuille au temps t_0 s'obtient donc par $A = Na_x$, avec N le nombre de rentières dans le portefeuille ($N = 4000$). Contrairement à l'actif qui se base sur l'espérance des survies, le passif est aléatoire et est propre à chaque rentière. La valeur actuelle des primes dues à la $i^{\text{ème}}$ rentière est donnée par :

$$l_i = \sum_{t=1}^{\lfloor \tau_i \rfloor} B_0(t)$$

où $\lfloor \tau_i \rfloor$ est l'année qui précède le décès car la rentière touche son annuité en fin d'année tant qu'elle est en vie. Le total de l'engagements dans le portefeuille devient alors :

$$L = \sum_{i=1}^N l_i \quad (21)$$

Tout comme Bacinello et al. [2], on décide de générer un portefeuille de décès pour chacun des scénarios de taux de mortalité. La méthodologie (Fung et al. (2015), Appendice A) [11] pour une simulation est la suivante :

1. Simuler les taux de mortalité $m_{x,t}$ de $t = 1$ à $T = 99 - x = 35$. Dans notre cas, on prend 10 000 simulations, par exemple celles obtenues précédemment, sur une période de 35 ans dans le calcul de la valeur de l'obligation,
2. Calculer les taux de mortalité cumulatifs pour la cohorte $I(t) = \sum_{s=1}^t m_{x,s}$,
3. Générer N nombres aléatoires, dénotés ε_i pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Ils peuvent être obtenus en prenant $-\ln(1 - U)$, où U est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.
4. Pour chacun des nombres aléatoires, ε_i , déterminer la plus grande valeur de t telle que $I(t) < \varepsilon_i$. Cette valeur de t sera le τ_i désiré, c'est-à-dire l'année du décès de la $i^{\text{ème}}$ rentière :

$$t_i = \lfloor \tau_i \rfloor$$

5. Une fois l'année t_i trouvée pour chaque rentière, on calcule la valeur actuelle des primes, l_i , qu'elle recevra ainsi que le passif total, L , pour ce scénario,
6. On répète cette opération avec les 10 000 simulations de taux de mortalité.

La distribution des surplus actualisés au temps t_0 pour un portefeuille d'annuités sans couverture correspond à la différence entre l'actif et le passif du portefeuille, soit :

$$D = A - L \quad (22)$$

La Figure 22 illustre la distribution du surplus pour chaque rente viagère, définie simplement comme la distribution des surplus D divisée par le nombre de rentières dans le portefeuille. On constate que sans ajustement pour le risque les surplus sont centrés en zéro alors qu'avec l'ajustement pour le risque la distribution est déplacée vers la droite et représente la valeur actuelle des primes de risque.

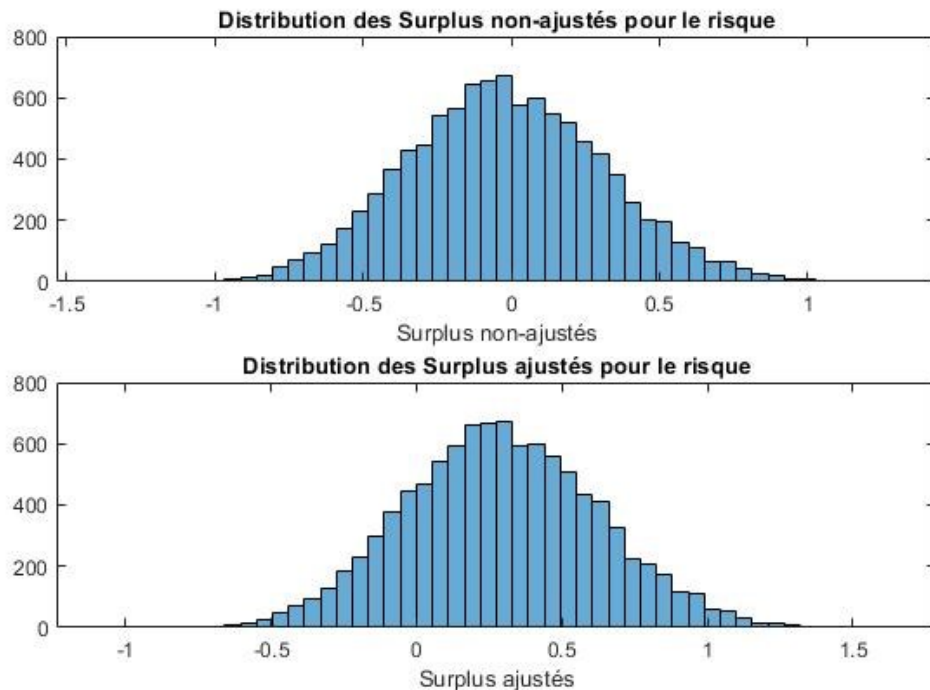


Figure 22 : Distribution des Surplus ajustés et non-ajustés

7. Instruments financiers dérivés utilisés pour la couverture

Les taux de mortalité ont beau être calculés rigoureusement avec les modèles précédents, ou avec d'autres modèles présents dans la littérature, il n'en reste pas moins que les prévisions futures ne sont pas une science exacte et sont sujets à des perturbations inattendues comme une épidémie mondiale ou à des progrès significatifs dans le domaine de la médecine. Les fonds de pension et les compagnies d'assurance doivent alors faire face au risque que les taux de survie réalisés soient supérieurs à ceux attendus. Les conséquences directes seraient inévitablement une hausse du nombre d'annuités, qui pourrait conduire dans des cas extrêmes à un important manque de liquidité. Pour se couvrir contre ce risque, les fonds de pension et les compagnies d'assurance peuvent prendre des positions sur des produits dérivés financiers de longévité ou de mortalité afin de transférer ce risque auprès d'autres investisseurs en échange du paiement d'une prime. Cette section présente différents produits financiers dérivés utilisés pour se couvrir contre le risque de longévité et leur performance selon la maturité. Le corps du mémoire inclut les résultats avec le modèle M7 car les « fits » sont les meilleurs et que l'une des contributions de cette étude consiste à mettre en place et évaluer la couverture en kappa (Section 7.3) pour les données canadiennes. Or la mise en place de cette couverture reprend en partie le modèle M5, dont M7 est une extension. Quant aux résultats avec les modèles de M5 et Li-Lee, ils sont joints en annexe pour la population des femmes canadiennes.

7.1 Couverture avec des produits dérivés de survie

Dans le cas où le sous-jacent des produits dérivés est le taux de survie, la couverture se présente comme la figure ci-dessous. Le fonds de pension devra payer les annuités aux rentiers en fonction des taux de survie et si ces derniers sont supérieurs à ce qui était prévu, alors le fonds recevra un taux variable proportionnel au taux de survie réalisé et

payera un taux fixe, de sorte que les flux monétaires soient égaux et définis à l'avance quels que soient les taux de survie.

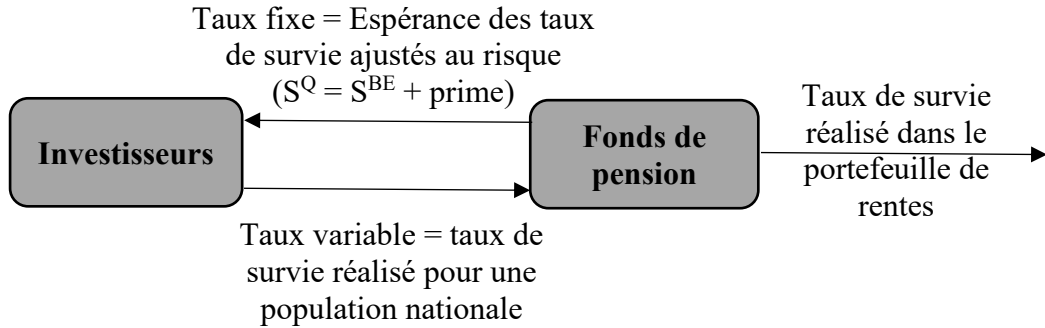


Figure 23 : Fonctionnement d'un S-Forward

7.1.1 Les S-Forwards (ou S-Swaps)

Les forwards de survie constituent l'un des instruments de couverture de base lorsqu'il s'agit de transférer le risque d'un portefeuille exposé au risque de longévité à une tierce partie. Il s'agit d'un accord entre deux contreparties pour échanger un montant variable égal à la survie réalisée pour une population donnée à une date future (la maturité du contrat) contre un montant fixe déterminé à la création du contrat. Cela permet ainsi de réduire d'éventuelles pertes même s'ils réduisent également les gains potentiels. Le payoff d'un forward se définit par :

$$P = e^{-\int_0^T m_x(v)dv} - K(T)$$

où $K(T)$ est donné par $E_0^Q \left[e^{-\int_0^T m_x(v)dv} \right] = \tilde{S}_x(T)$, le taux de survie ajusté pour le risque fixé au départ du contrat et qui est obtenu avec l'une des trois méthodes d'ajustement précédentes. Il incorpore la prime de risque payée par le hedger à l'investisseur. Le choix de $K(T)$ se justifie par l'absence de coût à l'initiation du contrat, ce qui doit impliquer que :

$$B_0(t)E_0^Q \left[e^{-\int_0^T m_x(v)dv} - K(T) \right] = 0$$

Comme le fonds de pension doit faire face au risque de longévité, il doit être long le S-forward, de sorte que si les taux de survie sont plus élevés que prévu, le fonds de pension recevra un payoff positif pour compenser la perte inattendue. A l'inverse, des

taux plus faibles réduiront le gain à cause d'un flux monétaires négatif sur le contrat. Ces S-forwards ne couvrent toutefois que sur une seule période T et les fonds de pension doivent se couvrir sur plusieurs années. Il est alors possible de transformer ces instruments en Swap de survie. Cela consiste à prendre position sur plusieurs S-Forwards à des dates de maturité différentes et à des taux fixes qui varient avec la maturité pour la même cohorte. Ainsi les flux monétaires du S-Swap coïncideront chaque année avec les paiements des rentes et permettront une couverture sur plusieurs années. La distribution des surplus d'un portefeuille couvert à l'aide d'un swap pour chaque rente viagère est donnée par :

$$D_{Swap} = \frac{A - L + F_{Swap}}{4000}$$

où le flux monétaire aléatoire provenant de la position longue du swap de longévité s'exprime :

$$F_{Swap} = \sum_{t=1}^T B_0(t) \left(e^{-\int_0^t m_x(v)dv} - \tilde{S}_x(0, t) \right) \quad (23)$$

7.1.2 Les Caplets de longévité (S-Caps)

En finance, un caplet désigne généralement un produit dérivé basé sur un taux d'intérêt dit de référence. Il s'agit d'un contrat pouvant être assimilé à une option d'achat européenne donnant la possibilité à son détenteur de percevoir un flux monétaire si le niveau du taux de référence excède le taux d'exercice. Les payoffs d'un caplet de longévité s'exprime de la façon suivante :

$$\max \left(\left(e^{-\int_0^T m_x(v)dv} - K(T) \right), 0 \right)$$

où $K(T) = E^P[S_T]$ est le meilleur estimé, au temps 0, de la survie au moment T. Il correspond à l'espérance $E_0^P \left[e^{-\int_0^t m_x(v)dv} \right]$ énoncé dans le calcul du prix de l'obligation EIB/BNP. On l'obtient en calculant la moyenne des 10 000 simulations à chaque temps t. Contrairement aux swaps de longévité, les caplets donnent le droit et non l'obligation aux détenteurs d'exercer l'option, ce qui signifie que les payoffs des caplets ne peuvent

pas être négatifs si le détenteur est rationnel. Ce privilège a un coût et nécessite de déboursier une prime pour obtenir le produit. Le prix d'un caplet à l'initiation est :

$$V_0 = B_0(t)E_0^Q \left[\max \left(\left(e^{-\int_0^T m_x(v)dv} - K(T) \right), 0 \right) \right]$$

Alors que le S-Forward utilise l'une des trois méthodes d'ajustement pour le risque lors du calcul du payoff, le caplet peut se servir d'une de ces méthodes pour s'ajuster non pas sur le payoffs de l'option directement mais sur le prix de l'option. En utilisant la méthode canonique, il suffit de calculer les payoffs au temps t , $t \in \llbracket 1, T \rrbracket$, pour chacune des 10 000 simulations et d'actualiser au temps t_0 . Il ne reste alors plus qu'à ajuster les prix du caplet en leur attribuant les probabilités sous la mesure canonique Q (Figure 18). A l'instar du S-Swap, le caplet apporte un rendement au portefeuille lorsque les taux de survie sont plus élevés qu'estimés. La seule différence provient des flux monétaires de l'option qui ne peuvent pas être négatifs. Les gains ainsi obtenus seraient uniquement affectés par la prime payée pour se couvrir, ce qui aurait pour conséquence directe une asymétrie positive des rendements du portefeuille. La distribution des surplus avec la couverture du caplet est donnée par :

$$D_{Cap} = \frac{A - L + F_{Cap} - C_{Cap}}{4000}$$

où F_{Cap} correspond aux payoffs du caplet et C_{Cap} est le coût du caplet.

7.1.3 Résultats de la couverture de survie unicolore

Dans cette sous-section, nous appliquons ces deux méthodes de couverture au portefeuille d'annuités précédent sur des échéances de 20 et 30 ans afin d'étudier l'impact d'une stratégie de couverture sur une plus longue période. Les résultats présentés proviennent du modèle M7 tandis que ceux obtenus avec les modèles M5 et Li-Lee seront en Annexe 6 et Annexe 7. Afin de juger de leurs performances, l'analyse se concentrera sur plusieurs statistiques dont la VaR et l'Expected Shortfall (ES) à 99% qui sont des mesures prépondérantes dans l'analyse du risque, mais nous calculons également la moyenne des rendements, l'écart-type, le skewness, le kurtosis et le rendement sur capital de risque (RCR). Le RCR est un outil qui permet entre autres de mieux appréhender

l'amélioration de la VaR à 99% relativement aux changements de la moyenne. Il se définit par :

$$RCR = \frac{\mu}{3 * |VaR99|}.$$

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99	RCR
Sans couverture	0.3176	0.3288	0.0466	2.9504	-0.4340	-0.5209	0.2439
Avec swap	0.2173	0.2245	-0.0206	2.8597	-0.2976	-0.3600	0.2434
Avec caplet	0.2601	0.2783	0.3829	3.1654	-0.3076	-0.3705	0.2819

Tableau 6 : Statistiques des surplus selon une couverture en survie du portefeuille sur 20 années

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99	RCR
Sans couverture	0.3176	0.3288	0.0466	2.9504	-0.4340	-0.5209	0.2439
Avec swap	0.0612	0.0655	-0.3408	2.8988	-0.1024	-0.1247	0.1992
Avec caplet	0.1571	0.2098	1.2677	4.6186	-0.1249	-0.1479	0.4193

Tableau 7 : Statistiques des surplus selon une couverture en survie du portefeuille sur 30 années

Les tableaux 6 et 7 permettent de constater que les produits de couverture réduisent le risque et les pertes potentielles du portefeuille comme attendu. Plus la période de couverture est longue, plus la couverture réduit le risque. En effet, bien que ces produits restreignent également le surplus moyen, la VaR et l'ES à 99% se sont nettement améliorés, passant respectivement de -0.4340\$ et -0.5209\$ à environ -0.30\$ et -0.37\$ pour une couverture de 20 ans et autour de -0.11\$ et -0.13\$ avec une couverture de 30 ans. Concernant la couverture à l'aide du caplet, les performances au niveau de la réduction des risques semblent être légèrement moins bonnes qu'avec une couverture avec le swap, même si la moyenne des surplus est plus grande. La Figure 25 illustre très clairement l'existence d'une asymétrie positive liée au Skewness et causée par les payoffs positifs du caplet. Ces derniers limitent ainsi les pertes du portefeuille, ce qui est en partie compensé par le prix de l'option qui s'élève à 0.28\$ pour 30 ans et de 0.11\$ pour 20 ans, et concentrent davantage les surplus autour de 0. L'analyse du RCR indique que le caplet

donne un meilleur rendement sur capital de risque pour les deux maturités. En effet, le RCR du caplet est de 0.2819 pour 20 ans et 0.4193 pour 30 ans, alors qu'il est de 0.2439 sans couverture, de 0.2434 avec un swap de 20 ans et de 0.1992 pour 30 ans. Ces bons résultats doivent toutefois être nuancés car ils proviennent des particularités de la distribution du caplet, c'est-à-dire un skewness et un kurtosis plus élevés. Prenons le cas d'une maturité de 30 ans, l'amélioration de la VaR est quasiment la même qu'avec un swap (-0.1249 contre -0.1024) alors que la moyenne et l'écart-type sont plus grands avec le caplet. Le skewness positif inclut des scénarios avec des gains plus importants, ce qui permet d'expliquer une moyenne et un écart-type plus élevés (impact positif sur le RCR).

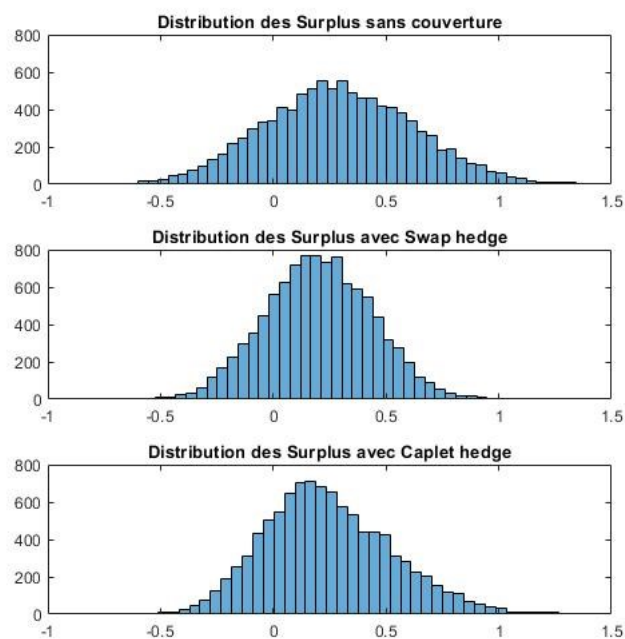


Figure 24 : Surplus avec une protection en survie sur 20 ans

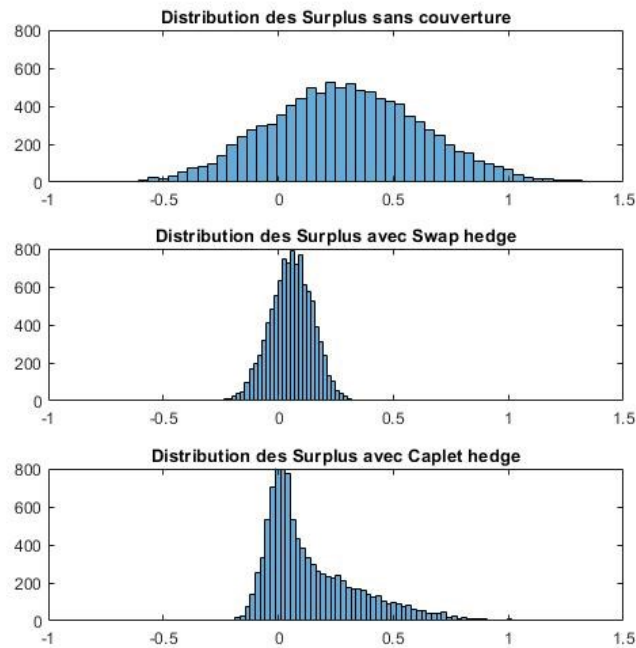


Figure 25 : Surplus avec une protection en survie sur 30 ans

En comparant ces résultats avec ceux obtenus avec les données américaines et britanniques, on constate beaucoup de similitude. Toutes deux indiquent également une meilleure couverture avec le swap, ainsi qu'une asymétrie positive et un Kurtosis supérieur à 4 pour le caplet. On mentionnera simplement que la différence entre la couverture du swap et du caplet est plus importante avec les données américaines. La VaR et l'ES sont respectivement de -0.1725\$ et -0.2099\$ pour le swap de 30 ans alors que qu'ils sont de -0.2462\$ et -0.2852\$ pour le caplet de 30 ans. Concernant les hommes, le Tableau 8 dénote la similarité des résultats avec la couverture des femmes. Il se rapproche toutefois davantage des résultats des femmes américaines quant à l'ampleur de la différence entre la couverture en swap et en caplet. Cette ampleur est d'environ 0.08\$ pour les Canadiens, 0.06\$ pour les Américains et 0.10\$ pour les Britanniques.

Portefeuille	Canadien		Américain		Britannique	
	VaR99	ES99	VaR99	ES99	VaR99	ES99
Sans couverture	-0.7764	-0.9316	-0.6190	-0.7584	-0.8868	-1.0827
Avec swap	-0.1451	-0.1816	-0.1086	-0.1341	-0.1355	-0.1713
Avec caplet	-0.2238	-0.2601	-0.1688	-0.1944	-0.2325	-0.2690

Tableau 8 : VaR et ES selon une couverture en survie sur 30 années pour les hommes des trois populations

7.1.4 Portefeuille multicohorte et couverture en survie multicohorte

Comme on l'a fait remarquer précédemment, le portefeuille de rentes contenant uniquement une cohorte d'âge est relativement simpliste car un fonds de pension n'a pas seulement des rentières âgées de 65 ans aujourd'hui, il y a également des rentières aux âges suivants. C'est pourquoi il est pertinent d'aborder la couverture d'un portefeuille de rentes qui inclut différentes cohortes afin de mieux refléter la réalité. Le portefeuille multicohorte sera ainsi constitué de 4 000 rentières ($N = 4\,000$), c'est-à-dire 800 femmes canadiennes appartenant à chacune des cohortes de 65 à 69 ans. Etant donné que nous avons cinq cohortes différentes, on obtiendra alors cinq prix différents en utilisant la Formule (18). Quant aux surplus du portefeuille, ils correspondent à la moyenne pondérée des surplus de chacune des cohortes présentes dans le portefeuille. Notons $\bar{A} - \bar{L}$ la moyenne des surplus sans couverture et \bar{S} le payoff moyen des swaps, la moyenne des surplus espérés \bar{D} , s'exprime alors par :

$$\bar{D} = \bar{A} - \bar{L} + \bar{S} \quad (24)$$

$$\bar{D} = \frac{N}{5} \sum_{x=65}^{69} a_x - \frac{1}{5} \sum_{x=65}^{69} \sum_{k=1}^{n_x} l_{x,k} + \frac{N}{5} \left(\sum_{x=65}^{69} \sum_{i=1}^T B_0(i) \left(e^{-\int_0^i m_x(v)dv} - \tilde{S}_x(i) \right) \right)$$

A noter que la formule ci-dessus permet de calculer les surplus couverts avec les cohortes de 65, 66, 67, 68 et 69 ans. Il est toutefois possible de l'appliquer à des cohortes cibles, comme par exemple 65, 67 et 69 ans ou encore 65 et 67 ans uniquement. Les Tableaux 9 et 10 présentent les statistiques obtenues avec différentes combinaisons de cohortes et des maturités différentes pour les Swaps et les Caplets respectivement.

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.2854	0.3242	0.0415	2.9134	-0.4606	-0.5429
S_{65}^{20}	0.2664	0.3043	0.0410	2.9192	-0.4319	-0.5135
$S_{65,66,67}^{20}$	0.2310	0.2646	0.0129	2.9025	-0.3818	-0.4535
$S_{65,66,67,68,69}^{20}$	0.2024	0.2304	-0.0144	2.8801	-0.3301	-0.3972
S_{65}^{25}	0.2505	0.2874	0.0423	2.8788	-0.3968	-0.4716

$S_{65,66,67}^{25}$	0.1877	0.2178	-0.0113	2.8422	-0.3146	-0.3695
$S_{65,66,67,68,69}^{25}$	0.1335	0.1540	-0.1204	2.8204	-0.2259	-0.2738
S_{65}^{30}	0.2342	0.2718	0.0282	2.9057	-0.3902	-0.4640
$S_{65,66,67}^{30}$	0.1407	0.1676	-0.0408	2.8660	-0.2524	-0.2974
$S_{65,66,67,68,69}^{30}$	0.0567	0.0672	-0.3324	2.8974	-0.1104	-0.1352

Tableau 9 : Statistiques des surplus selon une couverture en swap de survie multicohorte

Les notations S_x^T et C_x^T permettent d'identifier les cohortes (x) et la maturité (T) des instruments de couverture contenues dans le portefeuille. Par exemple, $S_{65,66}^{20}$ signifie que l'on a couvert le portefeuille à l'aide de deux swaps de 20 ans. L'un des deux swaps prend la cohorte de 65 ans comme sous-jacent et l'autre utilise la cohorte de 66 ans.

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.2854	0.3242	0.0415	2.9134	-0.4606	-0.5429
C_{65}^{20}	0.2790	0.3157	0.1049	2.9580	-0.4328	-0.5146
$C_{65,66,67}^{20}$	0.2668	0.2967	0.2002	3.0152	-0.3841	-0.4561
$C_{65,66,67,68,69}^{20}$	0.2588	0.2799	0.2908	3.0912	-0.3361	-0.4005
C_{65}^{25}	0.2683	0.3065	0.1630	2.9415	-0.3999	-0.4739
$C_{65,66,67}^{25}$	0.2393	0.2733	0.3827	3.1078	-0.3185	-0.3756
$C_{65,66,67,68,69}^{25}$	0.2164	0.2431	0.6260	3.4161	-0.2347	-0.2826
C_{65}^{30}	0.2577	0.2986	0.1997	2.9751	-0.3923	-0.4676
$C_{65,66,67}^{30}$	0.2093	0.2494	0.6021	3.3361	-0.2605	-0.3090
$C_{65,66,67,68,69}^{30}$	0.1684	0.2052	1.1362	4.3036	-0.1290	-0.1533

Tableau 10 : Statistiques des surplus selon une couverture en caplet de survie multicohorte

La première observation que l'on peut faire sur ces résultats est que la construction d'un portefeuille de swaps et de caplets avec plusieurs cohortes aboutit à une amélioration des couvertures. En effet l'écart-type du portefeuille avec un swap de 20 ans pour la cohorte de 65 ans est de 0.3043 alors que qu'il est de 0.2304 pour un portefeuille avec un swap de 20 ans pour les cohortes allant de 65 à 69 ans. Ainsi non seulement le portefeuille multicohorte est plus réaliste mais il offre une couverture plus efficace. Cette amélioration est encore plus visible lorsque l'on se concentre sur la VaR et l'ES à 99%, en particulier avec une maturité de 30 ans. Le portefeuille avec un swap ou un caplet pour la cohorte de

65 ans donnent respectivement -0.3902 et -0.3923 pour la VaR, et -0.4640 et -0.4676 pour l'ES alors qu'un portefeuille avec des swaps ou des caplets pour les cohortes de 65 à 69 ans donnent respectivement -0.1104 et -0.1290 pour la VaR, et -0.1352 et -0.1533 pour l'ES. En comparant aux mêmes portefeuilles avec des instruments de couvertures (swaps ou caplets) dont la maturité est de 20 ans, on constate que l'impact de la couverture en multicohorte est encore plus prononcé avec une maturité de 30 ans. Ce constat permet de soulever un point important : plus la période de couverture est longue, plus l'impact marginal d'une cohorte supplémentaire dans la stratégie de protection est important. Les Figures 26 et 27 ci-dessous présentent les distributions avec des Swaps et Caplets avec différentes cohortes.

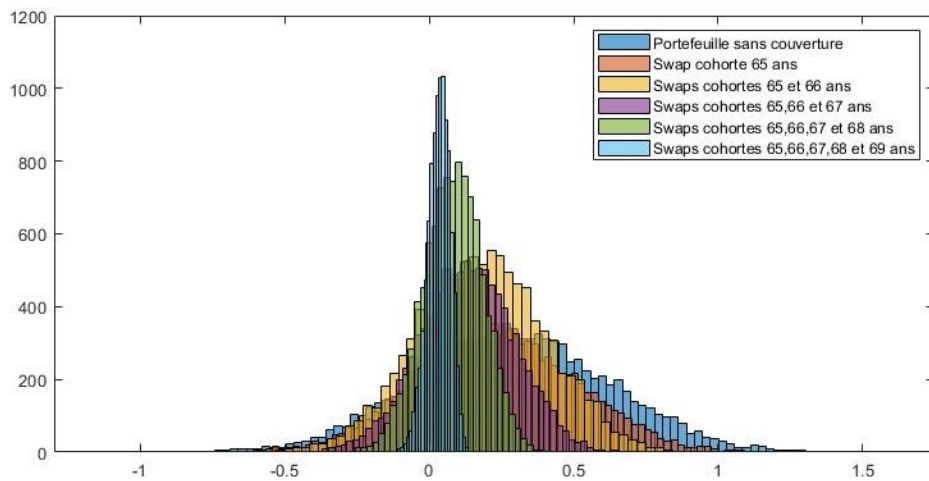


Figure 26 : Surplus avec une protection en swap de survie multicohorte sur 30 ans

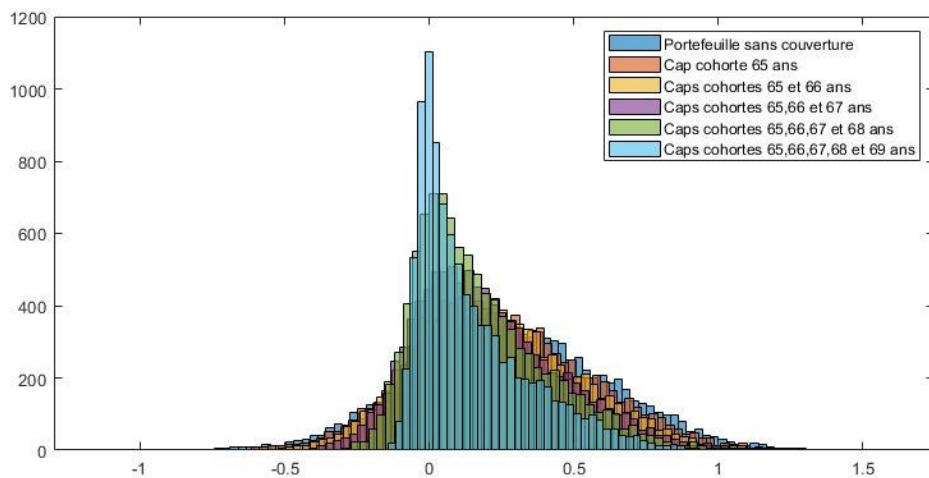


Figure 27 : Surplus avec une protection en caps de survie multicohorte sur 30 ans

Un deuxième exemple encore plus général et réaliste, qui s’inspire de Li et Luo [22], consisterait à prendre une structure démographique initiale en escalier ou une structure qui décroît linéairement sur 15 ou 20 cohortes pour construire le portefeuille multicohorte. Par exemple dans notre étude, on a choisi la structure en escalier sur 20 cohortes, autrement dit il y a initialement 275 annuitants pour les cohortes de 65 à 69 ans, 200 annuitants pour les cohortes de 70 à 74 ans, 175 annuitants pour les cohortes 75 à 79 ans et 150 annuitants pour les cohortes de 80 à 84 ans. A l’instar du premier exemple, on se couvre sur plusieurs cohortes pour diminuer le risque du portefeuille, toutefois on ne prend pas les cohortes de 65 à 69 ans pour se couvrir mais plutôt des cohortes prises aux deux ans (notion de « Key rates » développée par Ho [13] et traitée dans la partie suivante). Les résultats en Annexe 8 (Annexe 9 et Annexe 10 pour les résultats de cette méthode avec les modèles M5 et Li-Lee respectivement) montrent les mêmes caractéristiques que l’exemple avec les cohortes de 65 à 69 ans, c’est-à-dire une réduction du risque du portefeuille avec une amélioration marginale de plus en plus petite au fur et à mesure que l’on considère des cohortes plus âgées. Bien que l’on ait présenté seulement deux exemples de construction et de couverture d’un portefeuille multicohorte en survie, il existe une multitude d’autres méthodes. L’une d’entre elles reprend la notion de « Key rates » qui consiste à sélectionner des cohortes « clés » pour se couvrir. A la différence de notre deuxième exemple, on calculerait les sensibilités du portefeuille et on appliquerait un poids à chaque instrument lié aux cohortes « clés ». Par soucis de clarté et pour éviter de surcharger cette étude, on présentera et mettra en place cette méthodologie (Li et Luo (2012)) [22] dans la section 7.2 qui traite de la couverture de mortalité.

7.2 Couverture avec des produits dérivés de mortalité

Dans le cas où le sous-jacent des produits dérivés est le taux de mortalité, la couverture est construite différemment puisque le fonds de pension reçoit le taux fixe et paye le taux variable comme le montre la figure ci-dessous et il prend position sur un nombre limité d’instruments en utilisant les sensibilités du portefeuille. Le fonds de pension devra payer les annuités aux rentiers en fonction des taux de survie et si ces

derniers sont supérieurs à ce qui était prévu, alors les taux de mortalité seront plus faibles qu'attendus et le fonds payera un taux variable plus faible que le taux fixe qu'il recevra, ce qui compensera la perte causée par la plus grande longévité des rentiers.

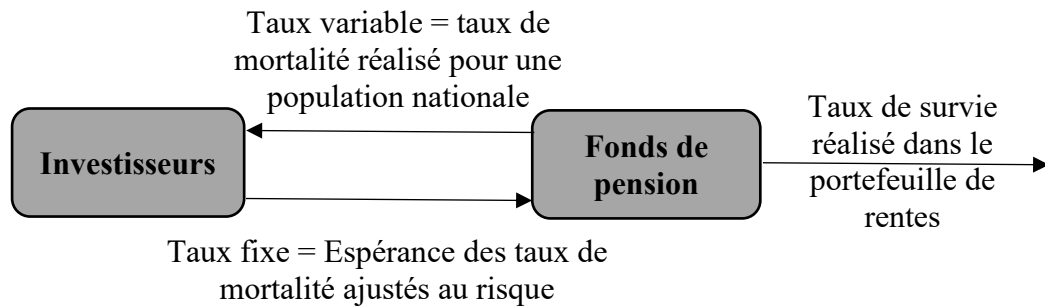


Figure 28 : Fonctionnement d'un Q-Forward

7.2.1 Les Key Q-Durations [22]

Bien que les concepts de forward et de caplet (dans ce cas-ci on utilisera des puts) restent inchangés, la méthodologie de couverture avec des taux de mortalité est différente. En effet, la couverture avec des instruments de survie s'effectue directement sur les flux monétaires de la rente annuelle et se définit donc comme une couverture de flux de trésorerie (cash-flow hedge) alors qu'avec les taux de mortalité, il s'agit d'une couverture dite de juste valeur qui consiste à prendre des positions d'investissement afin de protéger les contrats de rentes. Cette technique est dérivée de la couverture du risque de taux d'intérêt de Ho en « Key rates » [13]. D'après Li-Luo [22], le choix de l'utilisation des key q-durations se justifie par trois propriétés empiriques des taux de mortalité :

- **Propriété 1** : Les courbes de mortalité ont tendances à avoir des changements non-parallèles au cours des âges, c'est-à-dire qu'elles ne suivent pas la même évolution selon les périodes. Ainsi lorsque l'on mesure la sensibilité du passif du portefeuille à un changement sur la courbe des taux de mortalité, cela implique qu'il faut utiliser un vecteur de nombres et non un seul nombre puisqu'il ne peut pas prendre en compte les différentes évolutions.

- **Propriété 2** : La dimension du vecteur de nombres mesurant la sensibilité du passif du portefeuille peut être petite, autrement dit il n'est pas pertinent de calculer la sensibilité à chaque âge.

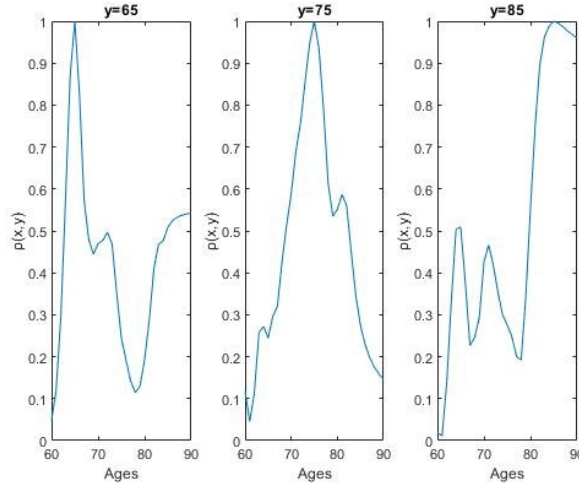


Figure 29 : Valeurs des corrélations $\rho(x,y)$ entre les facteurs de réduction pour $y = 65, 75, 85$ et $60 \leq x \leq 90$

• **Propriété 3 :** Il y a de la dépendance entre les âges. Tout comme avec Li et Luo [22], les corrélations ont été calculées à partir des probabilités de décès lissées avec la méthode de la partie 4.2 et avec lesquelles les facteurs de réduction de mortalité sont obtenus selon l'expression :

$$RF(x, t) = 1 - \frac{q(x, t + 1)}{q(x, t)}$$

La Figure 29 ci-dessus montre bien que les corrélations sont d'autant plus grandes que les âges sont proches et tendent à diminuer à mesure que l'écart entre les âges augmente. A plus ou moins cinq ans les corrélations sont supérieures à 0.5.

Comme le suggèrent les deux premières propriétés, la sensibilité du prix d'un portefeuille à un changement sur la courbe des taux de mortalité peut être mesurée par un vecteur de nombres à des points clés de la courbe. On pose n le nombre de points clés et x_1, x_2, \dots, x_n les âges clés correspondant sur la courbe de mortalité (vecteur des taux de mortalité pour une cohorte). La sensibilité du portefeuille à un taux de mortalité clé est désignée par l'expression de « key q-duration ». Supposons qu'il y ait une variation de $\delta(j)$ au $j^{\text{ème}}$ taux de mortalité clé. On pose q et $\tilde{q}(\delta(j))$ les surfaces de taux de mortalité

avant et après la variation au $j^{\text{ème}}$ taux de mortalité clé. Dès lors, la sensibilité du portefeuille au $j^{\text{ème}}$ key q-duration s'exprime par l'expression :

$$KQD(P(q), j) = \lim_{\delta(j) \rightarrow 0} \frac{P(\tilde{q}(\delta(j))) - P(q)}{\delta(j)} \quad (25)$$

où P désigne la valeur du portefeuille en fonction des taux de mortalité. Le vecteur des $KQD(P(q), j)$, pour tout $j = 1, \dots, n$, mesure la sensibilité du portefeuille pour l'ensemble de la courbe des taux. En pratique, la première étape consiste à calculer les variations à appliquer à chaque taux de mortalité clé. Toutefois, la propriété 3 stipule que les taux de mortalité sont corrélés entre eux, il est alors nécessaire de prendre en compte cette dépendance lors de l'application de $\delta(j)$. Pour ce faire, on suppose qu'une variation au $j^{\text{ème}}$ taux de mortalité clé engendrera également une variation des taux assez proches de x_j . Posons $s(x, j, \delta(j))$ la variation à l'âge x associée avec un changement de $\delta(j)$ sur le $j^{\text{ème}}$ taux de mortalité clé. On suppose que la fonction $s(\cdot)$ est une interpolation linéaire pour approximer la diminution de la dépendance entre deux taux de mortalité, ce qui peut être vérifié sur la Figure 29 où les corrélations proches du pic décroissent de façon linéaire. Pour $2 < j < n-1$,

$$s(x, j, \delta(j)) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{j-1} \\ \frac{\delta(j)(x - x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} & x_{j-1} < x \leq x_j \\ \frac{\delta(j)(x_{j+1} - x)}{x_{j+1} - x_j} & x_j < x < x_{j+1} \\ 0 & x \geq x_{j+1} \end{cases}$$

La variation sur l'ensemble de la courbe des taux de mortalité s'approxime donc par la somme des $s(x, j, \delta(j))$, $j = 1, \dots, n$. Autrement dit, pour tout âge x compris entre x_j et x_{j+1} , la variation sur les taux de mortalité à l'âge x n'est autre que la moyenne pondérée de $\delta(j)$ et $\delta(j+1)$, avec les poids $\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}$ et $\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}$ respectivement. La seconde étape consiste à appliquer ces variations à chaque taux de mortalité clé puis de calculer la valeur du portefeuille correspondant avec et sans variation. On obtient finalement les key q-durations avec la Formule (25).

Dans notre étude, on va prendre les q-forwards liés aux âges 70 en 2021, 75 en 2026, 80 en 2031, 85 en 2036 et 90 en 2041. La variation au $j^{\text{ème}}$ taux de mortalité clé utilisée est de 10 points de base et elle décroît de façon linéaire jusqu'aux $(j - 1)^{\text{ème}}$ et $(j + 1)^{\text{ème}}$ taux de mortalité clé. Le taux d'actualisation reste le même, c'est-à-dire 4%. En revanche, et contrairement à l'article de Li et Luo [22], on suppose qu'il y a un ajustement pour le risque via une prime de risque, ce qui implique que $E^Q(q(x_j, t_j)) < E^P(q(x_j, t_j))$ avec $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

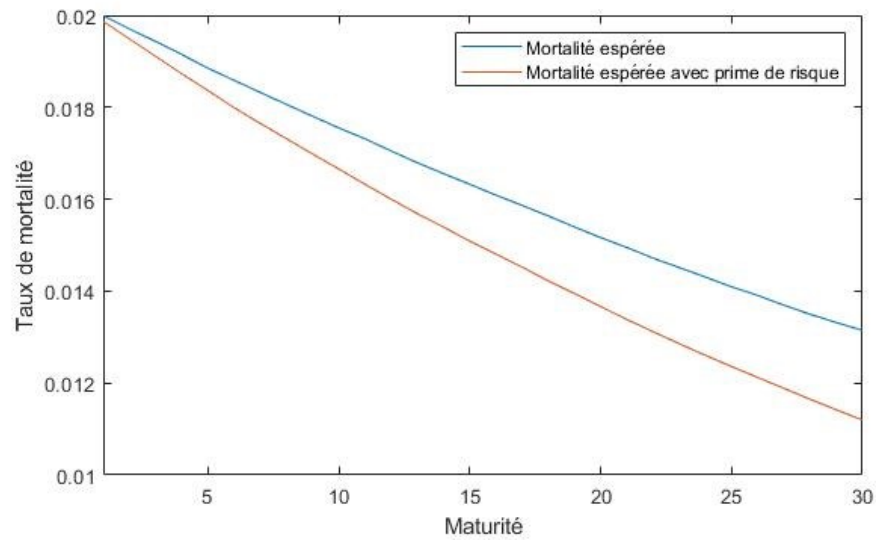


Figure 30 : Courbes des taux de mortalité espérés avec et sans prime de risque pour l'âge de 75 ans

Le Tableau 11 nous donne les key q-durations pour la population des femmes canadiennes modélisée avec le modèle M7 et les résultats sont du même ordre de grandeur que l'article de Li et Luo, à savoir qu'elles sont négatives et croissantes par rapport aux âges clés. Si on reprend la Formule 25, on constate que des key q-durations négatifs signifient que $P(\tilde{q}(\delta(j))) < P(q)$, ce qui est logique puisque la variation de $\delta(j)$ est positive. L'augmentation des taux de mortalité clés conduit à des survies plus petites, réduisant ainsi le passif du portefeuille. Concernant la croissance des key q-durations, elle provient de l'impact de la variation $\delta(j)$ sur les différents taux de mortalité clés. Autrement dit, la variation a plus d'impact quand $j = 1$ que lorsque $j = 5$ parce que, d'une part il y a bien plus de personne encore en vie à 70 ans qu'à 90 ans, et d'autre part le

facteur d'actualisation à t_0 des rentes annuelles est plus élevé à 70 ans ($t = 5$) qu'à 90 ans ($t = 25$), ce qui attribue plus de poids aux taux de mortalité associés à des âges plus faibles. A titre indicatif, les key q-durations et les résultats de la couverture de mortalité obtenus avec une variation $\delta(j)$ de -10 points de base sont les mêmes qu'avec une variation de 10 points de base.

	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5
x_j	70	75	80	85	90
$KQD(F(q), j)$	-0.7903	-0.6496	-0.5339	-0.4388	-0.3607
$KQD(L(q), j)$	-49.1303	-32.2584	-19.5500	-10.4883	-4.5648
w_j	62.1655	49.6604	36.6169	23.9004	12.6559

Tableau 11 : Key q-durations et le notionnel requis w_j pour le $j^{\text{ème}}$ Q-Forward

7.2.2 Mise en place de la couverture

Contrairement à la couverture en survie, la couverture en mortalité se construit par une combinaison limitée de contrats d'instruments financiers dérivés. La méthodologie de cette couverture est décrite ci-après dans le cadre des taux de mortalité et des q-forwards. Supposons qu'il y ait n q-forwards associés à la cohorte d'individus cible. L'idée est de calculer les sensibilités des taux de mortalité clés, qui correspondent aux taux de mortalité auxquels sont liés les q-forwards disponibles. On obtient alors les poids $w(j)$ que l'on attribue à chaque contrat q-forward. Au temps t_0 , la valeur de la couverture s'écrit :

$$H(q) = \sum_{j=1}^n w(j) F_j(q)$$

où $F_j(q)$ est la valeur du $j^{\text{ème}}$ q-forward dépendamment du scénario et $w(j)$ le notionnel requis du $j^{\text{ème}}$ q-forward pour la couverture. La partie variable du q-forward dépend du taux de mortalité $q(x_j, t_j)$ et la partie fixe dépend du taux de mortalité futur ajusté pour le risque $K(t_j) = E^Q(q(x_j, t_j))$. Il se définit ainsi par l'expression :

$$F_j(q) = (1 + r)^{-(T_j - t_0)} (K(t_j) - q(x_j, t_j))$$

L'obtention des poids $w(j)$ découle du fait que la sensibilité du passif du portefeuille doit être la même que celle de l'instrument financier dérivé utilisé pour que la couverture soit la plus efficace possible :

$$KQD(L(q), j) = KQD(H(q), j) \quad (26)$$

La sensibilité du passif du portefeuille a été calculée à l'aide de la Formule (25) de la sous-section précédente. Il suffit d'appliquer la même formule avec le forward pour obtenir la sensibilité de l'instrument financier :

$$\begin{aligned} KQD(F_j(q), j) &= \frac{F_j(\tilde{q}(\delta(j))) - F_j(q)}{\delta(j)} \\ &= \frac{(1+r)^{-(T_j-t_0)}(q^f - \tilde{q}) - (1+r)^{-(T_j-t_0)}(q^f - q)}{\delta(j)} \\ &= \frac{(1+r)^{-(T_j-t_0)}(q - \tilde{q})}{\delta(j)} = \frac{(1+r)^{-(T_j-t_0)}(q - q - \delta(j))}{\delta(j)} \\ &= -(1+r)^{-(T_j-t_0)} \end{aligned}$$

Ainsi pour satisfaire la Formule (26), le notionnel requis pour chaque q-forward de la couverture se calcule :

$$w(j) = \frac{KQD(L(q), j)}{KQD(F_j(q), j)} \quad (27)$$

Il ne reste plus qu'à calculer les surplus avec et sans couverture comme on l'a fait avec les survies pour chaque rente viagère. Dans le cas du put de mortalité, l'ajustement pour le risque s'effectue sur le prix de l'option comme avec la couverture en survie et la partie fixe est $K(t_j) = E^P(q(x_j, t_j))$.

7.2.3 Résultats de la couverture en mortalité unicohorte

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.3191	0.3286	0.0730	2.9464	-0.4228	-0.5120
Avec forwards	0.1712	0.1917	-0.0877	2.8642	-0.2793	-0.3373
Avec puts	0.2270	0.2629	0.4789	3.3191	-0.2954	-0.3561

Tableau 12 : Statistiques des surplus selon une couverture en mortalité du portefeuille avec trois instruments de couverture

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.3191	0.3286	0.0730	2.9464	-0.4228	-0.5120
Avec forwards	0.0464	0.0881	-0.1089	3.1504	-0.1689	-0.2040
Avec puts	0.1487	0.2101	1.0610	4.4122	-0.1929	-0.2306

Tableau 13 : Statistiques des surplus selon une couverture en mortalité du portefeuille avec cinq instruments de couverture

La couverture en mortalité va consister à prendre position sur trois instruments financiers aux âges clés de 70 ans en 2021, 75 ans en 2026 et 80 ans en 2031 et cinq instruments financiers aux âges clés de 70 ans en 2021, 75 ans en 2026, 80 ans en 2031, 85 ans en 2036 et 90 ans en 2041. Les Tableaux 12 et 13 nous indiquent que les q-forwards et les q-puts remplissent leur rôle dans la couverture du risque de longévité. En effet, que ce soit avec trois ou cinq instruments de couverture, la VaR et l'ES à 99% se sont améliorés avec chacun des deux instruments de couverture. En revanche l'écart-type est bien plus faible avec le forward, ce qui rejoint les conclusions de la couverture de survie qui stipulaient que le swap de survie semblait couvrir un peu mieux que le caplet. Concernant les survies justement, on remarque que les couvertures du swap et du caplet sont globalement meilleures que celles en mortalité, en particulier si l'on compare la VaR et l'ES pour la maturité de 30 ans. Ils sont respectivement autour de -0.11 et -0.13 en survie contre seulement -0.18 et -0.22 en mortalité. Les Figures 31 et 32 illustrent les résultats de la couverture de mortalité avec le q-forward et le q-put pour les deux maturités.

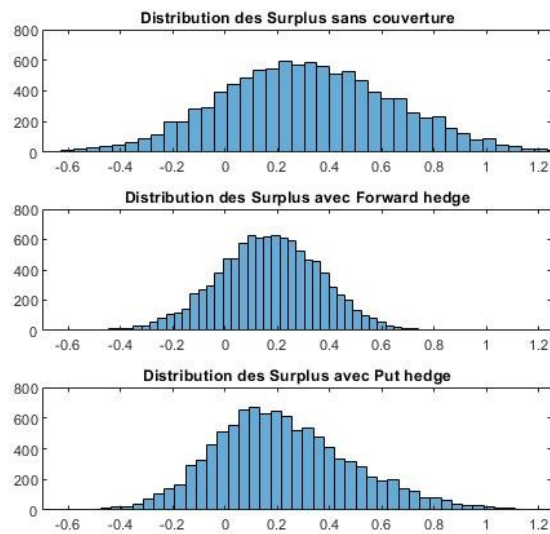


Figure 31 : Surplus avec une protection en mortalité (trois instruments)

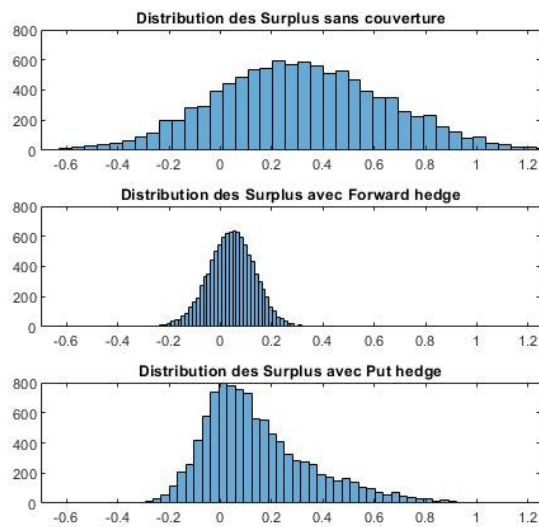


Figure 32 : Surplus avec une protection en mortalité (cinq instruments)

Les résultats obtenus avec le modèle M5 et Li-Lee, présentés en Annexe 11 et Annexe 12 respectivement, sont comparables à ceux que nous obtenons avec M7 et ceux des hommes sont brièvement abordés ci-après. Bien que les distributions des surplus sans couverture soient plus étendues pour les trois populations d'hommes comparativement à celle des femmes canadiennes, on constate que la couverture est tout aussi bonne. En

effet, le tableau ci-dessous montre que les couvertures permettent de diminuer les pertes espérées par plus de deux, voire trois dans le cas du put britannique.

Portefeuille	Canadien		Américain		Britannique	
	VaR99	ES99	VaR99	ES99	VaR99	ES99
Sans couverture	-0.7909	-0.9343	-0.6656	-0.7725	-0.9584	-1.1206
Avec forwards	-0.3291	-0.3970	-0.2904	-0.3538	-0.4120	-0.5235
Avec puts	-0.3064	-0.3562	-0.2667	-0.3189	-0.3270	-0.3797

Tableau 14 : VaR et ES selon une couverture en mortalité avec cinq instruments pour les hommes des trois populations

7.2.4 Couverture en mortalité multicohorte

A l'instar de la couverture en survie, il est possible de se couvrir avec des instruments financiers de mortalité avec un portefeuille d'annuités multicohorte. Comme les fonds de pension incluent plusieurs cohortes dans leurs portefeuilles, la couverture de longévité nécessite de prendre en compte l'ensemble de ces cohortes. C'est pourquoi on va généraliser la méthode des « Key q-durations », exposée précédemment pour la couverture en unicohorte dans une seule dimension, en une configuration avec deux dimensions afin de se couvrir également sur les cohortes adjacentes en restreignant au maximum le nombre d'instruments financiers. On suppose que le portefeuille est le même que le deuxième exemple de la couverture multicohorte en survie, c'est-à-dire 20 cohortes de 65 à 84 ans dont le nombre d'annuitants décroît en escalier et dont les années de naissance varient de 1933 à 1952. On pourrait mettre en place une couverture en appliquant les Key-rates pour chacune des cohortes prises séparément, cependant la configuration en unicohorte demanderait 76 q-forwards. Il est peu probable qu'il y ait autant de q-forwards disponibles sur le marché, et quand bien même ce serait le cas, la complexité de la couverture rendrait la gestion du portefeuille difficile et coûteuse. Pour diminuer le nombre d'instruments, il convient de miser sur la dépendance entre les cohortes en calculant les sensibilités sur une surface.

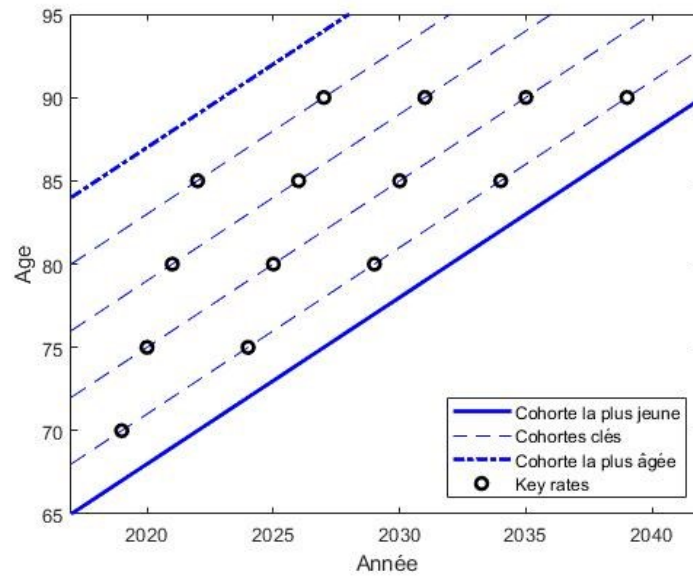


Figure 33 : Les cohortes clés utilisées dans la stratégie de couverture

La Figure 33 ci-dessus illustre la configuration en deux dimensions dans laquelle la surface des taux de mortalités comprend m cohortes clés dont les années de naissance sont dénotées par c_1, \dots, c_m . Pour chacune des cohortes clés $k, k = 1, \dots, m$, on dénombre n_k key rates localisés aux âges $x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n_k}$. On identifie alors le $j^{\text{ème}}$ key rates pour la cohorte k comme étant le $(j,k)^{\text{ème}}$ key rate. Tout comme Li et Luo [22], on pose $m = 4$ cohortes clés avec $c_1 = 1949, c_2 = 1945, c_3 = 1941$ et $c_4 = 1937$, chacune contenant des key rates espacés de cinq âges (comme avec l'unicohorte). On constate sur la Figure 33 que le nombre de q -forwards nécessaires pour se couvrir est seulement de quatorze.

k	n_k	Localisations des key rates
1	5	Ages 70, 75, 80, 85, 90
2	4	Ages 75, 80, 85, 90
3	3	Ages 80, 85, 90
4	2	Ages 85, 90

Tableau 15 : Localisation des key rates de mortalité

La variation que l'on applique aux key rates, noté $s(x, c, (j, k), \delta(j, k))$, est l'impact du changement $\delta(j, k)$ au $(j, k)^{\text{ème}}$ key rate pour l'âge x et l'année de naissance c . Tout comme le changement en unicohorte, l'impact $\delta(j, k)$ diminue au fur et à mesure que x et c s'éloignent de $x_{j,k}$ et c_k respectivement. La Figure 34 représente l'impact d'une augmentation de $\delta(j, k) = 0.10 \%$ au $(j, k)^{\text{ème}}$ key rate sur les autres taux de mortalité adjacents impliqués dans le portefeuille multicohorte. De façon générale, l'impact se définit, pour $j = 2, \dots, n_k - 1$ et pour $k = 2, \dots, m - 1$, par l'expression :

$$s(x, c, (j, k), \delta(j, k)) = \delta(j, k) \alpha(x, j, k) \beta(c, k)$$

où

$$\alpha(x, j, k) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{j-1,k} \\ \frac{x - x_{j-1,k}}{x_{j,k} - x_{j-1,k}} & x_{j-1,k} < x \leq x_{j,k} \\ \frac{x_{j+1,k} - x}{x_{j+1,k} - x_{j,k}} & x_{j,k} < x < x_{j+1,k} \\ 0 & x \geq x_{j+1,k} \end{cases}$$

et

$$\beta(c, k) = \begin{cases} 0 & c \leq c_{k-1} \\ \frac{c - c_{k-1}}{c_k - c_{k-1}} & c_{k-1} < c \leq c_k \\ \frac{c_{k+1} - c}{c_{k+1} - c_k} & c_k < c < c_{k+1} \\ 0 & c \geq c_{k+1} \end{cases}$$

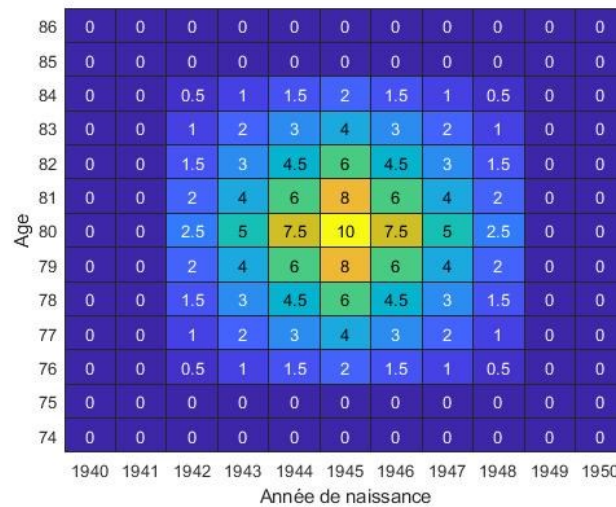


Figure 34 : L'impact d'une augmentation de $\delta(j, k) = 0.10 \%$ au $(j, k)^{\text{ème}}$ key rate sur les autres taux de mortalité adjacents impliqués dans le portefeuille multicohorte

Ce changement calculé à chaque key rate nous permet d'obtenir les Key q-durations. Posons Q et \tilde{Q} la surface des taux de mortalité initiale et celle affectée par le changement $\delta(j,k)$ respectivement. Les Key q-durations ainsi que les poids (Tableau 16) associés à chaque key rate se définissent par :

$$KQD(P(Q), (j, k)) = \lim_{\delta(j,k) \rightarrow 0} \frac{P(\tilde{Q}(\delta(j,k))) - P(Q)}{\delta(j,k)}$$

$$w(j, k) = \frac{KQD(L(Q), (j, k))}{KQD(F_{j,k}(Q), (j, k))}$$

Cohorte k	Age en 2017	n_k	Age et Année	Notionnel $w(j,k)$
1	68	1	(70, 2019)	19.0100
		2	(75, 2024)	17.7177
		3	(80, 2029)	13.0434
		4	(85, 2034)	8.4472
		5	(90, 2039)	4.4354
2	72	1	(75, 2020)	9.2600
		2	(80, 2025)	7.6359
		3	(85, 2030)	4.8908
		4	(90, 2035)	2.5296
3	76	1	(80, 2021)	6.6702
		2	(85, 2026)	4.4962
		3	(90, 2031)	2.3113
4	80	1	(85, 2022)	4.2232
		2	(90, 2027)	2.1773

Tableau 16 : Notionnel des q-forwards avec $x_{j,k}$ et $t_{j,k}$ comme âge et année de référence

Les résultats sont présentés dans les Tableaux 17 et 18. La notation des instruments de couverture comprend le nombre de cohortes clés en indice. Ainsi, $F_{1,2,3}$ correspond à une couverture avec tous les q-forwards des trois premières cohortes clés, c'est-à-dire les cinq q-forwards de la cohorte de 68 ans en 2017, les quatre q-forwards de

la cohorte de 72 ans en 2017 et les trois q-forwards de la cohorte de 76 ans en 2017. Le raisonnement est le même avec $P_{1,2,3}$ pour les puts. On remarque que la diminution de l'écart-type est tout aussi bonne que celle en unicohorte (Tableau 13) puisque qu'il est de 0.0921 et 0.1930 pour le q-forward et le put respectivement. Quant à la VaR et l'ES à 99%, ils diminuent d'au moins la moitié avec une couverture de 14 instruments. Les résultats de la couverture en mortalité multicohorte pour les modèles M5 et Li-Lee sont similaires et présentés en Annexe 13 et Annexe 14.

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.1976	0.2880	0.0314	2.9281	-0.4754	-0.5471
F_1	0.1144	0.1928	-0.1083	2.9093	-0.3529	-0.4072
$F_{1,2}$	0.0782	0.1446	-0.2002	2.9614	-0.2841	-0.3269
$F_{1,2,3}$	0.0554	0.1108	-0.2561	3.0538	-0.2297	-0.2624
$F_{1,2,3,4}$	0.0428	0.0921	-0.2413	3.1240	-0.1906	-0.2234

Tableau 17 : Statistiques des surplus selon une couverture en forward de mortalité multicohorte

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.1976	0.2880	0.0314	2.9281	-0.4754	-0.5471
P_1	0.1473	0.2433	0.3401	3.1313	-0.3694	-0.4234
$P_{1,2}$	0.1261	0.2205	0.5533	3.3791	-0.3106	-0.3537
$P_{1,2,3}$	0.1132	0.2036	0.7382	3.6741	-0.2652	-0.2990
$P_{1,2,3,4}$	0.1062	0.1930	0.8650	3.9303	-0.2307	-0.2649

Tableau 18 : Statistiques des surplus selon une couverture en put de mortalité multicohorte

7.3 Couverture avec des produits dérivés de Kappa

Tout comme pour les instruments de mortalité, le fonds de pension prendra une position courte sur les instruments en Kappa. Autrement dit, il devra payer les annuités aux rentiers en fonction des taux de survie et si ces derniers sont supérieurs à ce qui était prévu, alors les paramètres du modèle seront plus faibles qu'attendus et le fonds payera un taux variable plus faible que le taux fixe qu'il recevra, ce qui compensera la perte causée par l'espérance de vie plus longue.

Taux variable = kappa
réalisé pour une population
nationale

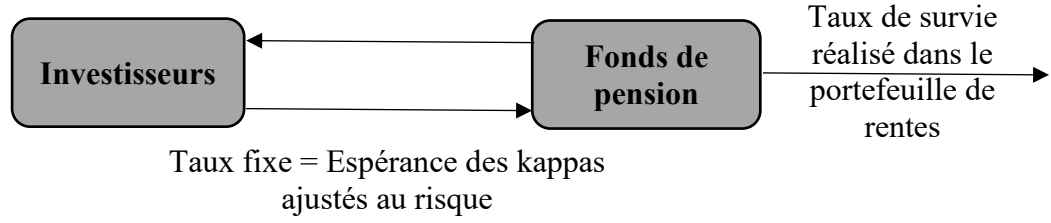


Figure 35 : Fonctionnement d'un K-Forward

7.3.1 Les Key K-Durations

De la même manière qu'avec les mortalités, il est possible de calculer la sensibilité d'un portefeuille grâce à des Kappas clés [32]. Cette sensibilité s'appelle « key k-duration » et peut s'exprimer par :

$$KKD_i(P(\kappa), j) = \lim_{\delta(j) \rightarrow 0} \frac{P(\tilde{\kappa}(\delta_i(j))) - P(\kappa)}{\delta_i(j)} \quad (28)$$

où i est associé au $i^{\text{ème}}$ paramètre du modèle utilisé pour la couverture et $P(\kappa)$ désigne la valeur du portefeuille en fonction des Kappas du modèle. Un choc sur $\kappa_{t_j}^{(i)}$ d'une quantité $\delta_i(j)$ est également accompagné de variations sur les $\kappa_t^{(i)}$ sur la période où $t_j \leq t \leq t_{j+1}$. Contrairement à Li et Luo [22] dont les variations aux taux adjacents suivent une fonction linéaire décroissante, Tan et al. [32] préconisent que ces variations soient les mêmes pour tous les $\kappa_t^{(i)}$ entre $\kappa_{t_j}^{(i)}$ et $\kappa_{t_{j+1}}^{(i)}$. Le choc $\delta_i(j)$ est supposé n'avoir aucun impact sur les trajectoires des $\kappa_t^{(i)}$ au-delà de $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ ainsi que sur les autres paramètres $\kappa_{t_j}^{(h)}$, pour tout $h \neq i$ et tout t . Les key k-durations et le notionnel requis w_j pour le $j^{\text{ème}}$ k-forward avec M7 sont présentés dans le Tableau 19 ci-dessous.

	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5
Année clé	2021	2026	2031	2036	2041
$KKD(F(q), j)$	-0.7903	-0.6496	-0.5339	-0.4388	-0.3607
$KKD(L(K1), j)$	-0.5174	-0.5412	-0.5241	-0.4342	-0.2724
$KKD(L(K2), j)$	5.1340	2.6984	0.0191	-2.1225	-2.6715
w_j K1	0.6546	0.8331	0.9816	0.9893	0.7552
w_j K2	-6.4961	-4.1541	-0.0357	4.8366	7.4068

Tableau 19 : Key k-durations et le notionnel requis w_j pour le $j^{\text{ème}}$ K-Forward avec M7

Comme les kappas sont des séries temporelles alors la couverture va consister à prendre position sur trois instruments financiers aux années clés de 2021, 2026 et 2031 et cinq instruments financiers aux années clés de 2021, 2026, 2031, 2036 et 2041. De plus, il peut y avoir plusieurs paramètres kappas dans un modèle, par exemple le modèle M7 qu'on utilise, ce qui élargit davantage la formule de la valeur de la couverture :

$$H(\kappa) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^P w^{(k)}(j) F_j^{(k)}(\kappa)$$

où n est le nombre d'années clés, P est le nombre de paramètres kappa dans le modèle et $F_j^{(k)}(\kappa)$ est la valeur de l'instrument de couverture avec j instrument pour le $k^{\text{ème}}$ paramètre. De la même manière que la couverture en mortalité, la partie fixe pour le forward est $K(t_j) = E^Q \left(\kappa_{t_j}^{(1)} \right)$ alors que celle pour le payoff du put de kappa est $K(t_j) = E^P \left(\kappa_{t_j}^{(1)} \right)$, l'ajustement se faisant sur le prix de l'option.

7.3.2 Résultats de la couverture en kappa unicohorte

Bien que la méthodologie générale soit relativement la même pour les trois modèles, les modèles M7 et Li-Lee nécessitent une étape supplémentaire. En effet notre étude vise à tester une couverture en kappa pour les trois modèles, et pour ce faire on souhaite obtenir les mêmes paramètres (κ_1 et κ_2) à des fins de comparaison, de sorte que seul le « fit » du modèle diffère. Ainsi une fois les 10 000 scénarios modélisés avec les modèles M7 et Li-Lee, on estime les paramètres κ_1 et κ_2 à l'aide du modèle M5 pour chacun des scénarios comme s'il s'agissait de données historiques. Cette étape doit sans doute faire perdre un peu d'information sur les taux de mortalité, ce qui se retranscrit sous la forme d'un léger déplacement vers la droite de la distribution avec une couverture. Pour remédier à ce problème il suffit simplement de recalculer les prix EIB et les poids π_i^* (Formule 16 pour l'ajustement au risque) avec les taux de mortalité « refittés ». Puis on continue avec la même méthodologie qu'avec M5. Cette étape sera également appliquée dans le cas de la couverture en kappa multicohorte sur les 20 cohortes. On peut

construire une couverture avec chacun des kappas séparément ou bien les deux combinés. Les Tableaux 20 et 21 nous indiquent que les K1-forwards et les K1-puts remplissent également leurs rôles dans la couverture du risque de longévité mais pas les K2-forwards et les K2-puts.

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.3134	0.3339	0.0771	2.9787	-0.4441	-0.5393
K1-Forward	0.1632	0.1941	0.0748	2.9524	-0.2791	-0.3290
K1-Put	0.2160	0.2651	0.5717	3.4073	-0.2969	-0.3481
K2-Forward	0.3127	0.3343	0.0770	2.9715	-0.4371	-0.5394
K2-Put	0.3130	0.3339	0.0772	2.9763	-0.4409	-0.5387
K1-Forwards et K2-Forwards	0.1625	0.1942	0.0723	2.9326	-0.2788	-0.3275
K1-Puts et K2-Puts	0.2156	0.2650	0.5734	3.4097	-0.2978	-0.3452

Tableau 20 : Statistiques des surplus selon une couverture en kappa du portefeuille avec trois instruments de couverture

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.3134	0.3339	0.0771	2.9787	-0.4441	-0.5393
K1-Forward	0.0568	0.1018	0.0840	3.1105	-0.1714	-0.2079
K1-Put	0.1458	0.2209	1.0827	4.3755	-0.1967	-0.2316
K2-Forward	0.3104	0.3320	0.0821	2.9785	-0.4342	-0.5368
K2-Put	0.3118	0.3328	0.0803	2.9777	-0.4388	-0.5382
K1-Forwards et K2-Forwards	0.0538	0.0963	0.1061	3.1136	-0.1633	-0.1957
K1-Puts et K2-Puts	0.1441	0.2194	1.1055	4.4164	-0.1918	-0.2257

Tableau 21 : Statistiques des surplus selon une couverture en kappa du portefeuille avec cinq instruments de couverture

Comme avec les survies, la couverture en κ_1 est meilleure avec le forward plutôt qu'avec le put car la VaR, l'ES et l'écart-type sont respectivement de -0.2791, -0.3290 et 0.1941 pour le forward et de -0.2969, -0.3481 et 0.2651 pour le put avec trois instruments de couverture. Ces résultats sont encore meilleurs avec cinq instruments. En revanche on remarque que la couverture avec κ_2 , que ce soit avec un forward ou un put avec une couverture à trois ou cinq instruments financiers, n'a absolument aucun impact sur les surplus puisque les six statistiques calculées sont semblables. Ainsi il est assez intuitif de penser que les résultats d'un portefeuille couvert à la fois avec κ_1 et κ_2 soient assez

proches de ceux de κ_1 seul, compte tenu de l'inefficacité de la couverture en κ_2 . Ce phénomène s'explique tout simplement par le fait que le paramètre κ_1 est le niveau général de la courbe des taux et contribue le plus aux taux de mortalité, alors que κ_2 , qui représente la pente de la courbe de mortalité et qui apporte une spécificité à chaque âge, contribue marginalement peu aux taux de mortalité. La différence d'ordre de grandeur peut se voir facilement sur les Figures 14, 15 et 20. Les résultats obtenus en générant les scénarios avec les modèles M5 et Li-Lee (Annexe 15 et Annexe 16) sont très semblables.

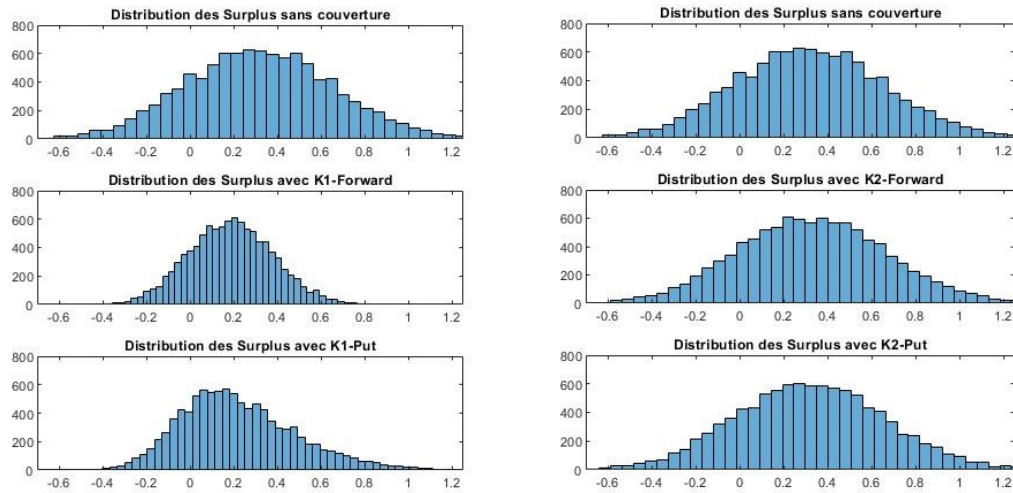


Figure 36 : Surplus avec une protection en Kappa (trois instruments)

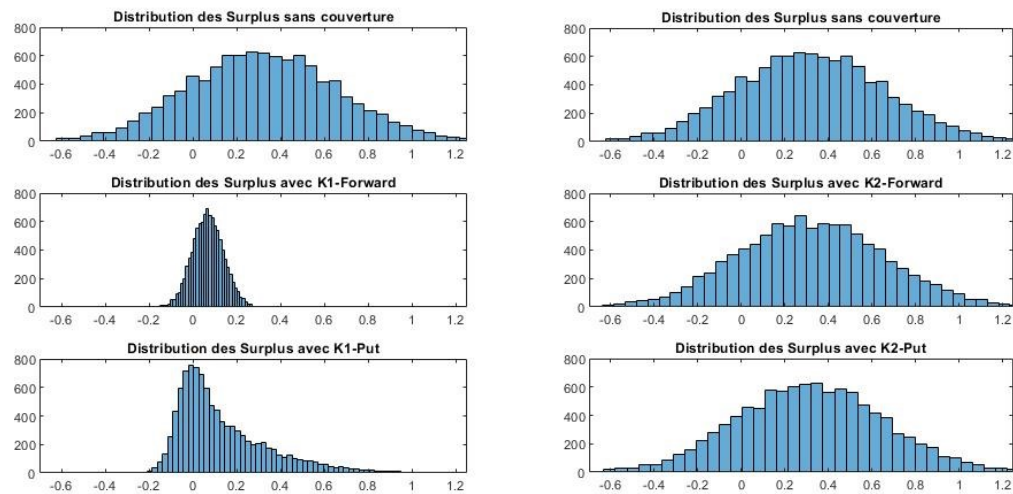


Figure 37 : Surplus avec une protection en Kappa (cinq instruments)

Tout comme avec la couverture en survie et en mortalité, on va comparer brièvement les résultats obtenus avec la population des hommes. A l'instar des femmes canadiennes, κ_1 est assez efficace contrairement à κ_2 qui n'apporte rien. L'efficacité des K1-Forwards est meilleure que celle des K1-Puts, en particulier pour les hommes britanniques (-0.2693 pour le K1-Forward contre -0.3701 pour le K1-Put concernant la VaR et -0.3079 pour le K1-Forward contre -0.4078 pour le K1-Put pour l'ES à 99%). Ce constat est semblable avec nos couvertures de survie (Tableau 8) pour les mêmes populations, en revanche les couvertures de mortalité (Tableau 14) indiquent une meilleure réduction de la VaR et de l'ES à 99% avec un put.

Portefeuille	Canadien		Américain		Britannique	
	VaR99	ES99	VaR99	ES99	VaR99	ES99
Sans couverture	-0.8092	-0.9825	-0.6389	-0.7691	-0.9229	-1.0952
K1-Forwards	-0.2846	-0.3392	-0.2823	-0.3320	-0.2693	-0.3079
K1-Puts	-0.3537	-0.4131	-0.3292	-0.3801	-0.3701	-0.4078
K2-Forwards	-0.7869	-0.9629	-0.6354	-0.7594	-0.9322	-1.0866
K2-Puts	-0.8017	-0.9711	-0.6303	-0.7624	-0.9270	-1.0901

Tableau 22 : VaR et ES selon une couverture en kappa avec cinq instruments pour les hommes des trois populations

7.3.3 Couverture en kappa multicohorte

De la même manière que dans le cas de la couverture en mortalité multicohorte, il est possible de construire un portefeuille avec une couverture en kappa multicohorte en généralisant la méthodologie utilisée dans la sous-partie 7.3.1. La seule différence provient du nombre d'instruments nécessaires pour se couvrir. Les key rates en kappa sont uniquement fonction de l'année contrairement aux mortalités où l'on associait un âge et une année (Tableau 16). Ainsi il est possible de calculer les sensibilités pour des années de référence (2022, 2027, 2032 et 2037 dans notre cas) et diminuer le nombre d'instruments à quatre au lieu de quatorze. Cette caractéristique de la couverture multicohorte en kappa est d'ailleurs l'argument principal de son attrait comparativement aux produits de mortalité.

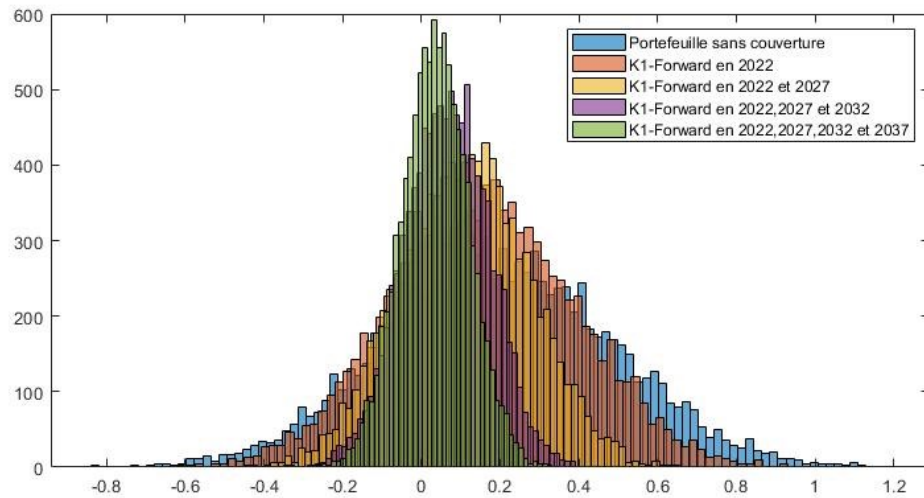


Figure 38 : Surplus avec une protection en K1-Forward multicohorte

Bien qu'on ait deux paramètres dans la couverture en kappa, on se concentrera uniquement sur κ_1 dans cette sous-partie car κ_2 n'apporte aucune protection contre le risque de longévité comme on l'a vu pour la couverture en unicohorte. En comparant les résultats des Tableaux 23 et 24 avec ceux de la couverture en unicohorte, on constate que les résultats sont tout aussi bons. L'écart-type passe de 0.2922 à 0.0850 avec une couverture de quatre K1-forwards et à 0.1807 avec quatre K1-puts. La VaR et l'ES à 99% diminuent de moitié, voire du triple pour le K1-forward (ES : -0.5617 contre -0.1856). Des résultats similaires sont observables aux Annexe 17 et Annexe 18 pour les modèles M5 et Li-Lee. La seule différence notable concerne la couverture avec $F_{2022,2027,2032,2037}$ pour le modèle Li-Lee. La distribution avec la couverture tend à être déplacée légèrement vers la gauche, ce qui a pour conséquence directe une diminution de la moyenne (0.0164), de la VaR et de l'ES à 99% (-0.1735 et -0.2024 respectivement). Cette différence provient sans doute de l'étape supplémentaire qui estime les paramètres κ_1 et κ_2 sur les 10 000 scénarios générés avec Li-Lee.

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.1946	0.2922	0.0153	2.9378	-0.4748	-0.5617
F_{2022}	0.1569	0.2355	0.0105	2.9254	-0.3865	-0.4534
$F_{2022,2027}$	0.1078	0.1644	-0.0011	2.9371	-0.2697	-0.3183
$F_{2022,2027,2032}$	0.0638	0.1073	-0.0123	2.9683	-0.1856	-0.2178

$F_{2022,2027,2032,2037}$	0.0335	0.0850	0.0391	2.9210	-0.1607	-0.1856
---------------------------	--------	--------	--------	--------	---------	---------

Tableau 23 : Statistiques des surplus selon une couverture en forward de kappa multicohorte

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.1946	0.2922	0.0153	2.9378	-0.4748	-0.5617
P_{2022}	0.1722	0.2636	0.1977	3.0065	-0.4027	-0.4692
$P_{2022,2027}$	0.1423	0.2280	0.5206	3.3173	-0.3020	-0.3504
$P_{2022,2027,2032}$	0.1153	0.1985	0.8666	3.9012	-0.2271	-0.2618
$P_{2022,2027,2032,2037}$	0.0967	0.1807	1.0793	4.4658	-0.1971	-0.2265

Tableau 24 : Statistiques des surplus selon une couverture en put de kappa multicohorte

7.4 Efficacité de la couverture

La couverture du risque de longévité est efficace si X^* est significativement moins variable que X , autrement dit si la variance du portefeuille avec couverture est plus petite que la variance sans couverture ($\sigma^2(X^*) < \sigma^2(X)$). Cette efficacité peut être mesurée à l'aide du pourcentage de réduction du risque du portefeuille R [22]. Dans notre étude toutefois, on utilisera l'Expected Shortfall dans la formule plutôt que la variance car les couvertures avec options (caps ou puts) permettent d'aller chercher plus de scénarios extrêmes positifs. Ce biais positif fausse alors l'interprétation de R à cause de la variance plus élevée, ce qui n'est pas le cas avec l'Expected Shortfall. On définit alors R par l'expression :

$$R = 1 - \frac{ES(X^*)}{ES(X)} \quad (29)$$

Plus l'ES (qui est négatif) du portefeuille avec couverture est élevée comparativement à celui du portefeuille sans couverture, plus R est grand et plus cela signifie que la couverture est efficace. Les pourcentages de réduction du risque du portefeuille pour différents modèles et instruments de couverture sont présentés dans les tableaux suivants.

Maturité		20 ans	25 ans	30 ans
Li-Lee	S-Swaps	37.50 %	61.15 %	84.48 %
	S-Caps	35.18 %	57.53 %	79.69 %
CBD (M5)	S-Swaps	29.75 %	51.90 %	76.19 %

	S-Caps	27.91 %	48.80 %	71.85 %
CBD (M7)	S-Swaps	30.88 %	51.35 %	76.06 %
	S-Caps	28.87 %	48.30 %	71.61 %

Tableau 25 : Pourcentage de réduction de risque provenant de portefeuilles couverts en survie avec différentes maturités

Maturité		3 Q-Forwards (ou Q-Puts)	4 Q-Forwards (ou Q-Puts)	5 Q-Forwards (ou Q-Puts)
Li-Lee	Q-Forwards	42.12 %	61.00 %	69.22 %
	Q-Puts	40.12 %	53.89 %	60.94 %
CBD (M5)	Q-Forwards	34.96 %	50.09 %	60.86 %
	Q-Puts	31.14 %	45.17 %	58.70 %
CBD (M7)	Q-Forwards	34.12 %	48.61 %	60.16 %
	Q-Puts	30.45 %	43.87 %	54.96 %

Tableau 26 : Pourcentage de réduction de risque provenant de portefeuilles couverts en mortalité avec différents nombres d'instruments financiers

De façon générale, on constate que les couvertures en mortalité avec trois Q-Forwards semblent plus efficaces que les couvertures en survie avec 20 ans de maturité alors qu'il s'agit de l'inverse lorsque l'on compare les deux dernières colonnes des Tableaux 25 et 26 (4 et 5 Q-Forwards et 25 et 30 ans de maturité). Quant aux résultats en eux-mêmes, les pourcentages de réduction du risque sont loin d'être négligeables puisque le risque diminue d'au moins une trentaine de pourcent pour la couverture en survie (maturité de 20 ans) et celle de mortalité (trois instruments). Tous les autres résultats sont encore meilleurs quel que soit le modèle ou la maturité. Concernant la maturité toujours, on note que l'amélioration du pourcentage de réduction du risque entre trois instruments et quatre instruments de mortalité est généralement plus important que celle entre quatre instruments et cinq instruments, ce qui traduit une efficacité marginale de couverture de moins en moins bonne au fur-et-à-mesure que l'on ajoute un instrument supplémentaire. Ceci est corroboré par les résultats de l'article de Li-Luo dont l'amélioration causée par l'ajout du 4^{ème} Q-Forward est marginalement plus élevée que celle de l'ajout du 5^{ème} Q-Forward. Comme la population aux grands âges est faible, la couverture pour ces âges a donc moins d'impacts dans la réduction du risque du portefeuille. Quant aux deux instruments financiers (Forwards et options), le Forward est légèrement plus efficace que l'option. Pour une maturité de 20 ans avec le modèle M7 par exemple, le pourcentage de réduction de risque avec une couverture de survie est de 29.75% avec le S-Swaps contre

seulement 27.91% avec le S-Caps. Les mêmes remarques sont applicables à la couverture en mortalité et en Kappa. Comme on l'a mentionné dans l'analyse du Tableau 20 et 21, la couverture de κ_1 est tout aussi efficace qu'avec les survies alors que κ_2 n'apporte presque rien. Le pourcentage de réduction du risque avec κ_1 et κ_2 est alors sensiblement le même qu'avec κ_1 seul.

Maturité		3 K-Forwards (ou K-Puts)	4 K-Forwards (ou K-Puts)	5 K-Forwards (ou K-Puts)
Li-Lee	K1-Forwards	41.50 %	56.51 %	63.10 %
	K1-Puts	37.80 %	51.60 %	57.64 %
CBD (M5)	K1-Forwards	37.33 %	53.57 %	63.89 %
	K1-Puts	33.97 %	49.03 %	59.01 %
CBD (M7)	K1-Forwards	38.99 %	53.70 %	61.45 %
	K1-Puts	35.45 %	49.47 %	57.06 %

Tableau 27 : Pourcentage de réduction de risque provenant de portefeuilles couverts en κ_1 avec différents nombres d'instruments financiers

Certes la réduction du risque pour les portefeuilles unicohortes avec les trois sous-jacents (survie, mortalité et kappa) est pertinente mais elle l'est encore plus avec les portefeuilles multicohortes qui ont l'avantage d'être plus proches de la réalité. L'Annexe 19 présente les pourcentages de réduction du risque pour les mortalités et κ_1 avec les différentes cohortes prises dans la stratégie de couverture. On remarque ainsi que les résultats sont tous aussi bons que ceux obtenus ci-dessus pour l'unicohorte. Par exemple les couvertures avec la première année (2022) réduisent déjà le risque d'au moins 20% avec les Forwards et les couvertures avec les quatre Forwards réduisent le risque de plus de 60% pour les trois modèles. Dans l'optique de développer un marché avec ces types de produits de couverture, compte tenu de leur efficacité sur des portefeuilles multicohortes et surtout du petit nombre d'instruments nécessaires, il est évident que les fonds de pension ou les compagnies d'assurance seraient intéressés par ces produits financiers afin de transférer le risque de longévité à des investisseurs sur le marché. Bien qu'on ait décidé de modifier le calcul du pourcentage de la réduction du risque avec l'ES, il peut être intéressant de mentionner le degré de réduction du risque en utilisant la variance. En effet, la réduction du risque avec la formule originelle de Li et Luo [22] se devine déjà en analysant les différents graphiques dans ce mémoire. Par exemple pour les

couvertures de Forwards avec des maturités de 30 ans en survie ou cinq instruments en mortalité et kappas, on atteint une réduction de la variance de plus de 90%.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était de modéliser les taux de mortalité et d'étudier l'impact que certains produits dérivés pouvaient avoir sur la couverture d'un portefeuille d'annuités. L'hypothèse générale suggérait que l'implantation d'instruments financiers dérivés permettrait aux fonds de pension et aux compagnies d'assurance de se couvrir en transférant le risque de longévité à des investisseurs, autres que les compagnies d'assurance et de réassurance, sur le marché. Ces investisseurs seraient entre autres intéressés par la diversification qu'apporteraient ces produits sur leur propre portefeuille parce qu'ils ne sont pas corrélés avec le marché. Notre intérêt s'est porté sur trois sous-jacents : les taux de survie, les taux de mortalité et les paramètres kappas du modèle M5 de Cairns et al. [6].

Bien que les trois modèles de taux de mortalité aient leurs propres caractéristiques, (meilleurs « fits » pour le modèle M7 et la propriété d'invariance des données pour le modèle M5), on constate que l'efficacité des différentes couvertures ne varie pas significativement, indiquant ainsi que le succès de la couverture serait possible dans la réalité. Quel que soit le modèle ou le sous-jacent, les résultats indiquent que les couvertures atténuent grandement le risque du portefeuille. En effet, la variance est réduite de plus de 90 % avec des Forwards pour 30 ans de maturité en survie et cinq instruments en mortalité et en kappa, et d'au moins 60 % si on considère l'Expected Shortfall. Quant à la VaR et l'ES à 99%, elles s'améliorent également en diminuant les pertes. Ce constat est d'autant plus pertinent qu'il est le même avec un portefeuille unicohorte et un portefeuille multicohorte. Concernant la couverture en mortalité et en kappa, la méthodologie de Li-Luo [22] permet de construire les couvertures avec un nombre limité d'instruments. Cet argument est également un point important de notre étude, notamment pour les instruments en kappa, puisqu'il permettrait de transiger ces

produits sur le marché et d'assurer une certaine liquidité, ce qui a cruellement manqué aux premières obligations de longévité/mortalité transigées.

D'autres pistes peuvent être l'objet d'études similaires comme l'utilisation d'autres modèles de prévisions des taux de mortalité avec un paramètre de cohorte. D'après Cairns et al. [7], les modèles M2 et M8 donnent de meilleurs « fits » que M5, même s'il faut prendre également en compte qu'il y a plus de paramètres avec le modèle M8. L'existence d'un risque de base propre à chaque population est également un problème qui peut susciter l'intérêt. Il se définit par la différence entre la mortalité des rentiers et les indices de mortalité nationaux. Bien qu'il soit toujours présent, le risque de base s'accroît davantage si les indices de mortalité sont basés sur une autre population nationale. Dans ce sens, il serait alors nécessaire de prendre en compte les risques de base des populations couvertes avec le risque de base des populations avec lesquelles les instruments sont liés (Li et Hardy, 2011) [21]. Le modèle Li-Lee est l'un des différents modèles de mortalité multi-populations qui permettrait entre autres de tester des couvertures entre populations (cross-population hedge).

Bibliographie

- [1] Alho, J., 2000, *Discussion of Lee R.*, North American Actuarial Journal, vol.4, pp. 91-93.
- [2] Bacinello, A.R., Biffis, E., Millossovich, P., 2010, *Regression-based algorithms for life insurance contracts with surrender guarantees*, Quantitative Finance, vol.10, n°9, pp. 1077-1090.
- [3] Blake, D., Burrows, W., *Survivor Bonds : Helping to Hedge Mortality Risk*, Journal of Risk & Insurance, vol.68, n°2.
- [4] Booth, H., Maindonald, J., Smith, L., 2002, *Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline*, Population Studies, vol.56, n°3, pp. 325-336.
- [5] Brouhns, N., Denuit, M., Vermunt, J.K., 2002, *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables*, Insurance : Mathematics and Economics, vol.31, n°3, pp.373-393.
- [6] Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., 2006b, *A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty : theory and calibration*, The Journal of Risk and Insurance, vol.73, n°4, pp. 687-718.
- [7] Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D., Ong, A., Balevich, I., 2009, *A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States*, North American Actuarial Journal, vol.13, n°1, pp. 1-35.
- [8] Chan, W.S., Li, J.S-H., Li, J., 2014, *The CBD Mortality Indexes : Modeling and Applications*, North American Actuarial Journal, vol.18, n°1, pp. 38-58.
- [9] Dahl, M., 2004, *Stochastic Mortality in Life Insurance : Market Reserves and Mortality-Linked Insurance Contracts*, Insurance : Mathematics and Economics, vol.35, n°1, pp. 113-136.
- [10] Denuit, M., Devolder, P., Goderniaux, A.C., 2007, *Securitization of Longevity Risk : Pricing Survivor Bonds with Wang Transform in the Lee-Carter Framework*, Journal of Risk and Insurance, vol.74, n°1, pp. 87-113.
- [11] Fung, M.C., Ignatieva, K., Sherris, M., 2015, *Managing Systematic Mortality Risk in Life Annuities : An Application of Longevity Derivatives*, UNSW Business School Research Paper, n°20015ACTL04.
- [12] Gompertz, B., 1825, *On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies*, Philosophical Transactions of Royal Society, vol.115, pp. 513-583.

- [13] Ho, T.S.Y., 1992, *Key Rate Durations : Measures of Interest Rate Risks*, The Journal of Fixed Income, vol.2, n°2, pp. 29-44.
- [14] Human Mortality Database, 2019. University of California, Berkeley (USA), and Max-Planck Institute of Demographic Research, Germany. Available online at www.mortality.org.
- [15] Hyndman, R., Ullah, M., 2007, *Robust forecasting of mortality and fertility rates : A functional data approach*, Computational Statistics & Data Analysis, vol.51, n°10, pp. 4942-4956.
- [16] Kannisto, V., Lauristen, J., Thatcher, A.R., Vaupel, J.W., 1994, *Reductions in mortality at advanced ages : Several decades of evidence from 27 countries*, Population and Development Review, vol.20, n°4, pp. 793-809.
- [17] Kullback, S., Leibler, R.A., 1951, *On Information and Sufficiency*, Annals of Mathematical Statistics, vol.22, n°1, pp. 79-86.
- [18] Lee, R.D., 2000, *The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications*, North American Actuarial Journal, vol.4, n°1, pp. 80-93.
- [19] Lee, R.D., Carter, L., 1992, *Modeling and Forecasting U.S. Mortality*, Journal of the American Statistical Association, vol.87, n°419, pp. 659-671.
- [20] Li, H., Waegenaere, A., Melenbergh, B., 2015, *The choice of sample size for mortality forecasting : A Bayesian learning approach*, Insurance : Mathematics and Economics, vol.63, pp. 153-168.
- [21] Li, J.S-H, Hardy, M.R., 2011, *Measuring Basis Risk in Longevity*, North American Actuarial Journal, vol.15, n°2, pp. 177-200.
- [22] Li, J.S-H., Luo, A., 2012, *Key Q-Duration : a Framework for Hedging Longevity Risk*, Astin Bulletin, vol.42, n°2, pp. 413-452.
- [23] Li, J.S-H., Ng, A.C-Y., 2011, *Canonical Valuation of Mortality-Linked Securities*, The Journal of Risk and Insurance, vol.78, n°4, pp. 853-884.
- [24] Li, N., Lee, R., 2005, *Coherent Mortality Forecasts for a Group of Populations : An Extension of the Lee-Carter Method*, Demography, vol.42, n°3, pp. 575-594.
- [25] Makeham, W.M., 1860, *On the law of mortality*, Journal of the Institute of Actuaries, n°113.
- [26] Nedyalkova, C., 2020, *Hedging longevity risk with joint-population model*, Mémoire, Université de Sherbrooke.
- [27] Organisation des Nations-Unies (ONU) <https://www.un.org/fr/sections/issues-depth/ageing/index.html>

- [28] Organisation Mondiale de la Santé (OMS) <https://www.who.int/ageing/fr/>
- [29] Osmond, C., 1985, *Using age, period and cohort models to estimate future mortality rates*, International Journal of Epidemiology, vol.14, n°1, pp. 124-129.
- [30] Renshaw, A.E., Haberman, S., 2006, *A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors*, Insurance : Mathematics and Economics, vol.38, n°3, pp. 556-570.
- [31] Statistiques Canada, 2019. Available online at <https://www150.statcan.gc.ca/t1/tbl1/fr/tv.action?pid=1310071001>.
- [32] Tan, C.I., Li, J., Li, J.S-H., Balasooriya, U., 2014, *Parametric mortality indexes : From index construction to hedging strategies*, Insurance : Mathematics and Economics, vol.59, pp. 285-299.
- [33] Tuljapurkar, S., Li, N., Boe, C., 2000, *A universal pattern of mortality decline in the G7 countries*, Nature 405, pp. 789-792.
- [34] Uhlenbeck, G.E., Ornstein, L.S., 1930, *On the Theory of Brownian Motion*, Physical Review, vol.36, pp. 823-841.
- [35] Verhulst, P.F., 1845, *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*, Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, n°18, pp. 1-42.
- [36] Wang, J.L., Huang, H., Yang, S.S., Tsai, J.T., 2009, *An optimal product mix for hedging longevity risk in life insurance companies : The immunization theory approach*, Journal of Risk and Insurance, vol.77, n°2, pp.473-497.
- [37] Wang, S.S., 2000, *A Class of Distorsion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks*, The Journal of Risk and Insurance, vol.67, n°1, pp. 15-36.
- [38] Wilmoth, J.R., 1993, *Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change*, Department of Demography, University of California, Berkeley.

Annexes

Annexe 1 : Décomposition en valeurs singulières

Le procédé d'algèbre linéaire de décomposition en valeurs singulières, dite SVD, d'une matrice est un outil important de factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes et permet entre autres de diagonaliser ces matrices.

Afin de vulgariser au mieux cette méthode, il paraît pertinent de définir certaines notions :

- Une matrice adjointe, notée M^* , d'une matrice M à coefficients complexes est la matrice transposée de la matrice conjuguée de M . Si les coefficients de M sont réels alors il s'agit tout simplement de la matrice transposée ($M^* = M^T$).

- Une matrice carrée U à coefficients complexes est dite unitaire si et seulement si $U^* \times U = I$ (matrice identité). Dans le cas où les coefficients sont réels alors $U^* = U^T$ et U est dite orthogonales ($U^T \times U = I$).

- Notons λ_i les valeurs propres de $M^T M$. Une valeur singulière se définit comme la racine carrée des valeurs propres de $M^T M$, autrement dit :

Pour tout $i \in [1, \min(m,n)]$,

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

La décomposition s'énonce de la façon suivante : Soit M une matrice $m \times n$ dont les coefficients appartiennent à $K = \mathbb{R}$ ou à $K = \mathbb{C}$, alors il existe une factorisation de la forme :

$$M = U \Sigma V^T = \sum_i \sigma_i u_i v_i^t$$

avec

U une matrice unitaire $m \times m$ sur K dont les colonnes sont les vecteurs singuliers à gauche.

Σ une matrice $m \times n$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs singulières de la matrice M , ordonnées de façon décroissantes (réels positifs ou nuls). Tous les autres sont nuls coefficients étant nuls.

V^* est la matrice conjointe à V , matrice unitaire $n \times n$ sur K .

Dans ce mémoire toute matrice adjointe sera toujours égale à la transposée de cette matrice ($V^* = V^T$ et $M^* = M^T$) car tous les coefficients sont réels. On peut réécrire la décomposition de la matrice M de la même manière avec la matrice $Z_{x,t}$:

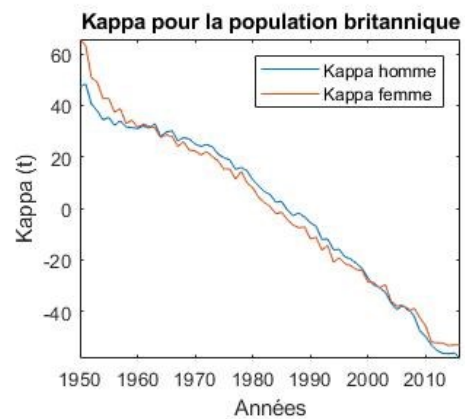
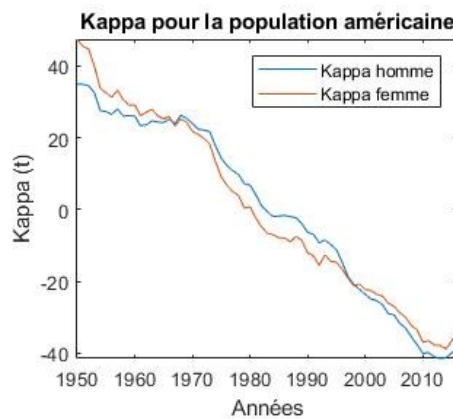
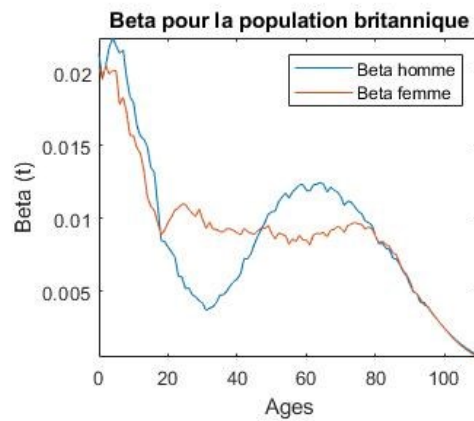
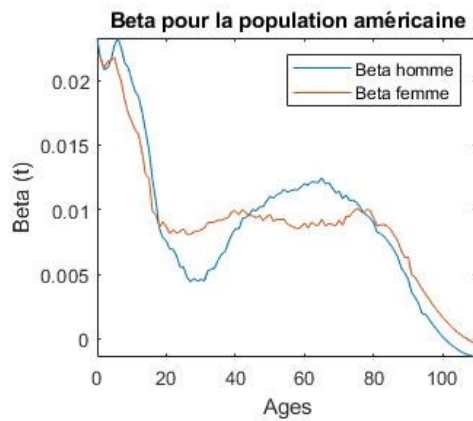
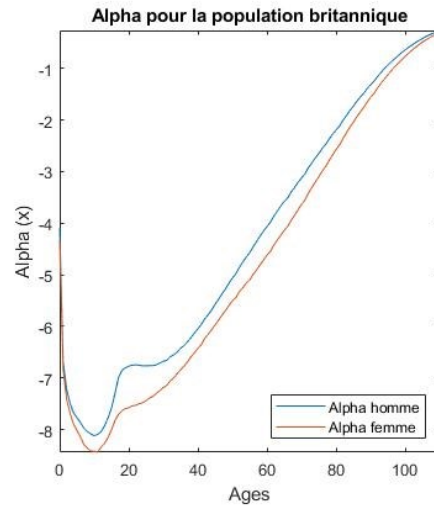
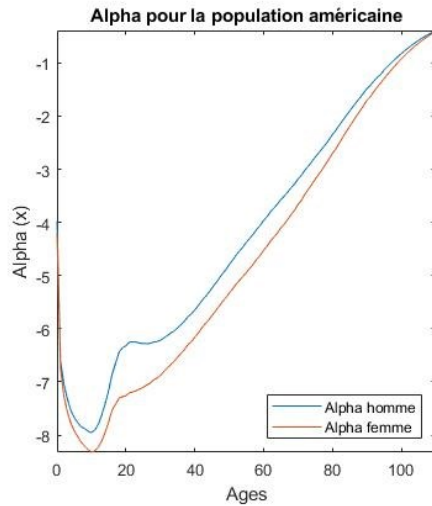
$$Z_{x,t} = \sum_i \sigma_i u_i v_i^t = \sigma_1 u_1 v_1^t + \dots + \sigma_{\min(m,n)} u_{\min(m,n)} v_{\min(m,n)}^t \approx \sigma_1 u_1 v_1^t$$

Les paramètres estimés s'écrivent alors :

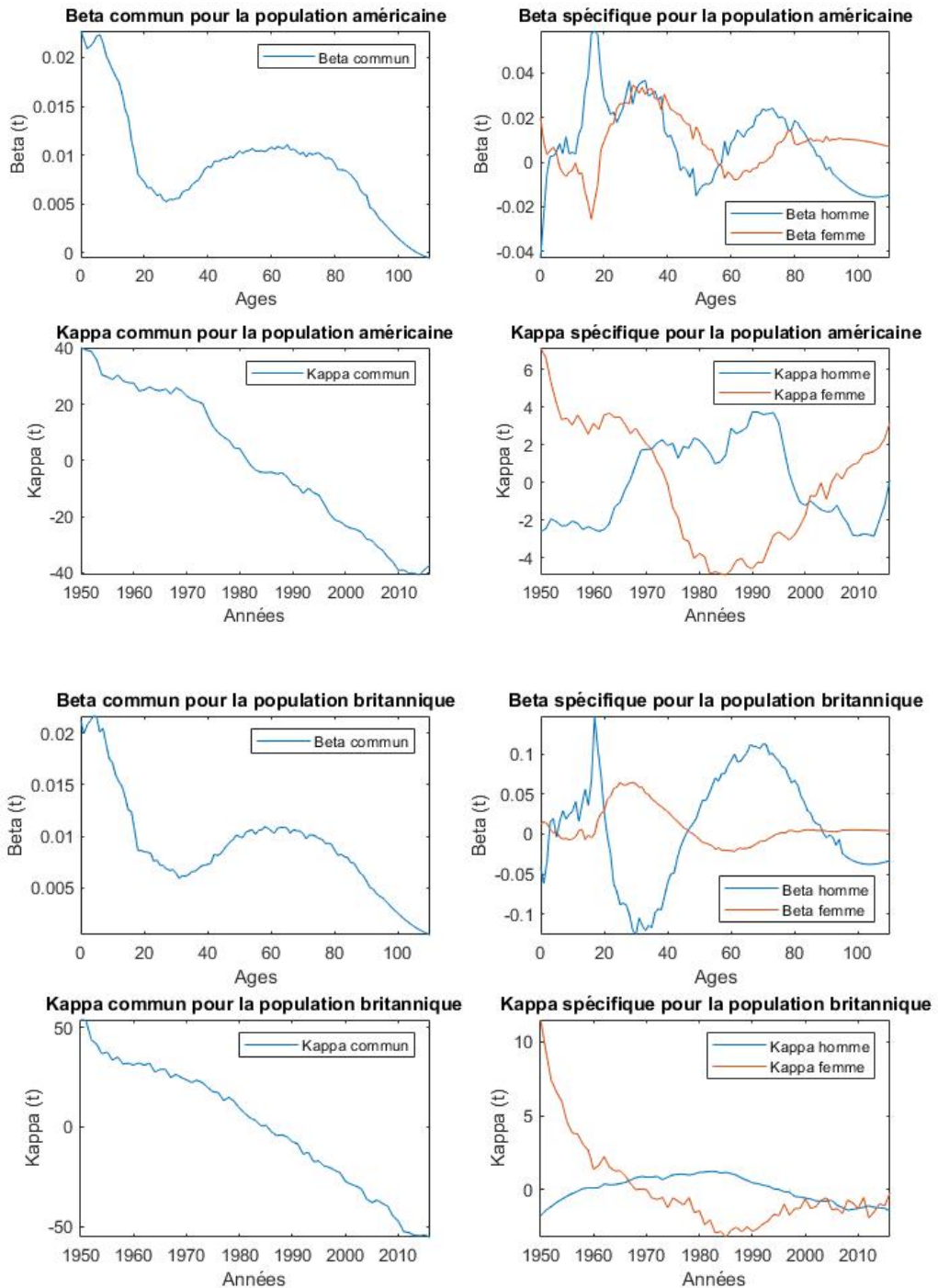
$$\widehat{\beta}_x = \frac{u_1}{\sum_{x=x_0}^{x_M} u_{1x}} \text{ et } \widehat{\kappa}_t = \sigma_1 \left(\sum_{x=x_0}^{x_M} u_{1x} \right) v_1$$

Remarque : La méthode de la décomposition en valeurs singulières peut, dans ce cas précis, être remplacée par l'utilisation d'une régression. Le coefficient α_x resterait la valeur moyenne des $\ln m_{x,t}$ au cours du temps, κ_t serait la somme des $Z_{x,t} = \ln m_{x,t} - \widehat{\alpha}_x$ selon les âges x pour un temps donné, et enfin β_x correspondrait au coefficient déduit de la régression de $Z_{x,t}$ sur κ_t .

Annexe 2 : Paramètres du Modèle LC pour les Etats-Unis et le Royaume-Uni



Annexe 3 : Paramètres du Modèle LL pour les Etats-Unis et le Royaume-Uni



Annexe 4 : Primes de risques annuelles estimées (en points de base) pour les obligations de longévité avec différentes dates de maturité

Maturité (en Années)	Transformée de Wang	Evaluation Canonique	Modèle à deux facteurs
1	13.05	0.66	0.22
2	12.82	0.91	0.25
3	12.74	1.16	0.32
4	12.75	1.43	0.42
5	12.82	1.72	0.53
6	12.93	2.03	0.67
7	13.07	2.35	0.83
8	13.23	2.70	1.01
9	13.41	3.07	1.21
10	13.62	3.47	1.44
11	13.84	3.89	1.70
12	14.07	4.33	1.99
13	14.32	4.81	2.31
14	14.57	5.31	2.67
15	14.84	5.84	3.08
16	15.12	6.39	3.52
17	15.41	6.98	4.01
18	15.70	7.60	4.55
19	16.00	8.25	5.15
20	16.31	8.92	5.79
21	16.61	9.62	6.49
22	16.92	10.35	7.25
23	17.23	11.10	8.06
24	17.53	11.87	8.93
25	17.83	12.66	9.85
26	18.12	13.46	10.82
27	18.41	14.26	11.83
28	18.67	15.06	12.88
29	18.93	15.86	13.95
30	19.16	16.64	15.02
31	19.37	17.40	16.09
32	19.57	18.12	17.14
33	19.73	18.80	18.16
34	19.88	19.43	19.12
35	20	20	20

**Annexe 5 : Primes de risques annuelles estimées
avec l’Evaluation Canonique (en points de base)
sur les périodes 1960-2016 et 1980-2016**

Maturité (en Années)	Evaluation Canonique (1960-2016)	Evaluation Canonique (1980-2016)
1	0.70 (0.04)	0.69 (0.03)
2	0.91 (0.00)	0.90 (-0.01)
3	1.16 (0.00)	1.15 (-0.01)
4	1.42 (-0.01)	1.42 (-0.01)
5	1.70 (-0.02)	1.71 (-0.01)
6	2.00 (-0.03)	2.01 (-0.02)
7	2.32 (-0.03)	2.33 (-0.02)
8	2.67 (-0.03)	2.68 (-0.02)
9	3.04 (-0.03)	3.05 (-0.02)
10	3.43 (-0.04)	3.44 (-0.03)
11	3.86 (-0.03)	3.86 (-0.03)
12	4.30 (-0.03)	4.31 (-0.02)
13	4.77 (-0.04)	4.78 (-0.03)
14	5.27 (-0.04)	5.28 (-0.03)
15	5.80 (-0.04)	5.81 (-0.03)
16	6.35 (-0.04)	6.37 (-0.02)
17	6.94 (-0.04)	6.96 (-0.02)
18	7.55 (-0.05)	7.57 (-0.03)
19	8.19 (-0.06)	8.22 (-0.03)
20	8.86 (-0.06)	8.90 (-0.02)
21	9.55 (-0.07)	9.61 (-0.01)
22	10.28 (-0.07)	10.34 (-0.01)
23	11.02 (-0.08)	11.10 (0.00)
24	11.79 (-0.08)	11.88 (0.01)
25	12.57 (-0.09)	12.68 (0.02)
26	13.37 (-0.09)	13.48 (0.02)
27	14.18 (-0.08)	14.29 (0.03)
28	14.99 (-0.07)	15.10 (0.04)
29	15.79 (-0.07)	15.90 (0.04)
30	16.57 (-0.07)	16.69 (0.05)
31	17.34 (-0.06)	17.44 (0.04)
32	18.07 (-0.05)	18.16 (0.04)
33	18.77 (-0.03)	18.83 (0.03)
34	19.41 (-0.02)	19.45 (0.02)
35	20.00 (0.00)	20.00 (0.00)

Annexe 6 : Statistiques selon une couverture en survie unicohorte sur 20 et 30 années avec le modèle M5 pour les femmes canadiennes

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99	RCR
Sans couverture	0.3143	0.3328	0.0888	2.9738	-0.4191	-0.5375	0.2500
Avec swap	0.2160	0.2278	-0.0017	2.9340	-0.2946	-0.3776	0.2445
Avec caplet	0.2587	0.2829	0.4160	3.1952	-0.3056	-0.3875	0.2822

Statistiques des surplus selon une couverture du portefeuille sur 20 années

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99	RCR
Sans couverture	0.3143	0.3328	0.0888	2.9738	-0.4191	-0.5375	0.2500
Avec swap	0.0611	0.0658	-0.3076	2.9989	-0.1015	-0.1280	0.2005
Avec caplet	0.1568	0.2141	1.2998	4.5960	-0.1232	-0.1513	0.4242

Statistiques des surplus selon une couverture du portefeuille sur 30 années

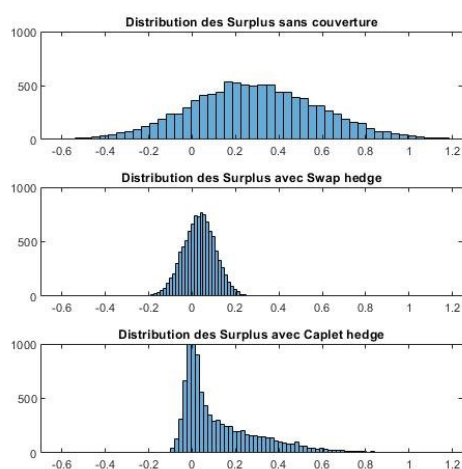
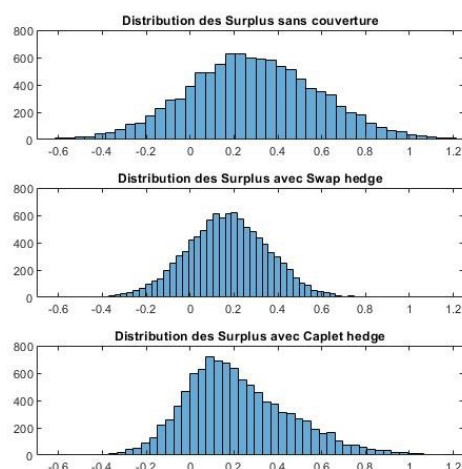
Annexe 7 : Statistiques selon une couverture en survie unicohorte sur 20 et 30 années avec le modèle Li-Lee pour les femmes canadiennes

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,3016	0,3213	0,0875	3,0023	-0,4274	-0,5213
Avec swap	0,1787	0,1899	-0,0132	2,9705	-0,2612	-0,3258
Avec caplet	0,2284	0,2596	0,5756	3,3757	-0,2725	-0,3379

Statistiques des surplus selon une couverture du portefeuille sur 20 années

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,3016	0,3213	0,0875	3,0023	-0,4274	-0,5213
Avec swap	0,0355	0,0392	-0,3095	3,1067	-0,0639	-0,0809
Avec caplet	0,1336	0,1986	1,4742	5,0641	-0,0884	-0,1059

Statistiques des surplus selon une couverture du portefeuille sur 30 années



Surplus avec une protection en survie sur 20 ans (gauche) et 30 ans (droite)

Annexe 8 : Statistiques selon une couverture en survie multicohorte avec un portefeuille en escalier sur 20 cohortes (M7)

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,1988	0,2882	0,0235	2,9238	-0,4602	-0,5447
S_{65}^{30}	0,1811	0,2703	0,0134	2,9252	-0,4436	-0,5216
$S_{65,67}^{30}$	0,1653	0,2529	0,0039	2,9173	-0,4223	-0,4950
$S_{65,67,69}^{30}$	0,1516	0,2355	-0,0046	2,9259	-0,4000	-0,4659
$S_{65,67,69,71}^{30}$	0,1429	0,2233	-0,0110	2,9284	-0,3786	-0,4442
$S_{65,67,69,71,73}^{30}$	0,1353	0,2116	-0,0178	2,9257	-0,3644	-0,4223
$S_{65,67,69,71,73,75}^{30}$	0,1299	0,2022	-0,0247	2,9178	-0,3453	-0,4032
$S_{65,67,69,71,73,75,77}^{30}$	0,1251	0,1935	-0,0270	2,9200	-0,3326	-0,3873
$S_{65,67,69,71,73,75,77,79}^{30}$	0,1213	0,1856	-0,0338	2,9183	-0,3151	-0,3705
$S_{65,67,69,71,73,75,77,79,81}^{30}$	0,1188	0,1800	-0,0348	2,9124	-0,3013	-0,3559
$S_{65,67,69,71,73,75,77,79,81,83}^{30}$	0,1170	0,1753	-0,0400	2,9229	-0,2940	-0,3473

Statistiques des surplus selon une couverture en swap de survie multicohorte

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,1988	0,2882	0,0235	2,9238	-0,4602	-0,5447
C_{65}^{30}	0,1919	0,2795	0,0672	2,9405	-0,4397	-0,5215
$C_{65,67}^{30}$	0,1865	0,2710	0,1151	2,9600	-0,4192	-0,4949
$C_{65,67,69}^{30}$	0,1826	0,2625	0,1649	2,9896	-0,3990	-0,4664
$C_{65,67,69,71}^{30}$	0,1814	0,2566	0,1997	3,0110	-0,3798	-0,4450
$C_{65,67,69,71,73}^{30}$	0,1811	0,2509	0,2343	3,0325	-0,3651	-0,4238
$C_{65,67,69,71,73,75}^{30}$	0,1817	0,2463	0,2629	3,0501	-0,3465	-0,4051
$C_{65,67,69,71,73,75,77}^{30}$	0,1828	0,2421	0,2900	3,0712	-0,3288	-0,3891
$C_{65,67,69,71,73,75,77,79}^{30}$	0,1842	0,2383	0,3133	3,0911	-0,3158	-0,3729
$C_{65,67,69,71,73,75,77,79,81}^{30}$	0,1861	0,2356	0,3305	3,1026	-0,3023	-0,3587
$C_{65,67,69,71,73,75,77,79,81,83}^{30}$	0,1881	0,2333	0,3425	3,1172	-0,2966	-0,3498

Statistiques des surplus selon une couverture en caps de survie multicohorte

Annexe 9 : Statistiques selon une couverture en survie multicohorte avec un portefeuille en escalier sur 20 cohortes (M5)

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,1945	0,2976	-0,0203	2,9505	-0,5145	-0,6027
S_{65}^{30}	0,1769	0,2791	-0,0296	2,9475	-0,4921	-0,5736
$S_{65,67}^{30}$	0,1614	0,2608	-0,0340	2,9561	-0,4638	-0,5423
$S_{65,67,69}^{30}$	0,1479	0,2430	-0,0436	2,9558	-0,4325	-0,5092
$S_{65,67,69,71}^{30}$	0,1392	0,2304	-0,0488	2,9625	-0,4112	-0,4845
$S_{65,67,69,71,73}^{30}$	0,1316	0,2180	-0,0551	2,9724	-0,3900	-0,4614
$S_{65,67,69,71,73,75}^{30}$	0,1263	0,2079	-0,0555	2,9680	-0,3727	-0,4385
$S_{65,67,69,71,73,75,77}^{30}$	0,1220	0,1988	-0,0613	2,9636	-0,3566	-0,4182
$S_{65,67,69,71,73,75,77,79}^{30}$	0,1185	0,1909	-0,0670	2,9713	-0,3463	-0,4025
$S_{65,67,69,71,73,75,77,79,81}^{30}$	0,1161	0,1851	-0,0712	2,9749	-0,3325	-0,3895
$S_{65,67,69,71,73,75,77,79,81,83}^{30}$	0,1143	0,1803	-0,0750	2,9760	-0,3249	-0,3783

Statistiques des surplus selon une couverture en swap de survie multicohorte

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,1945	0,2976	-0,0203	2,9505	-0,5145	-0,6027
C_{65}^{30}	0,1876	0,2885	0,0261	2,9529	-0,4920	-0,5742
$C_{65,67}^{30}$	0,1823	0,2795	0,0773	2,9618	-0,4679	-0,5439
$C_{65,67,69}^{30}$	0,1785	0,2707	0,1287	2,9722	-0,4360	-0,5122
$C_{65,67,69,71}^{30}$	0,1774	0,2645	0,1654	2,9843	-0,4146	-0,4882
$C_{65,67,69,71,73}^{30}$	0,1772	0,2585	0,2026	2,9993	-0,3948	-0,4656
$C_{65,67,69,71,73,75}^{30}$	0,1780	0,2535	0,2358	3,0104	-0,3792	-0,4437
$C_{65,67,69,71,73,75,77}^{30}$	0,1794	0,2490	0,2635	3,0201	-0,3628	-0,4236
$C_{65,67,69,71,73,75,77,79}^{30}$	0,1810	0,2452	0,2865	3,0350	-0,3492	-0,4078
$C_{65,67,69,71,73,75,77,79,81}^{30}$	0,1830	0,2423	0,3027	3,0442	-0,3346	-0,3943
$C_{65,67,69,71,73,75,77,79,81,83}^{30}$	0,1851	0,2399	0,3150	3,0515	-0,3248	-0,3834

Statistiques des surplus selon une couverture en caps de survie multicohorte

Annexe 10 : Statistiques selon une couverture en survie multicohorte avec un portefeuille en escalier sur 20 cohortes (Li-Lee)

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,1862	0,2670	0,0213	2,9923	-0,4388	-0,5255
S_{65}^{30}	0,1680	0,2482	0,0096	2,9798	-0,4129	-0,4944
$S_{65,67}^{30}$	0,1516	0,2295	0,0055	2,9875	-0,3889	-0,4632
$S_{65,67,69}^{30}$	0,1374	0,2111	-0,0012	3,0002	-0,3614	-0,4305
$S_{65,67,69,71}^{30}$	0,1283	0,1985	-0,0092	3,0074	-0,3412	-0,4090
$S_{65,67,69,71,73}^{30}$	0,1206	0,1866	-0,0155	3,0051	-0,3175	-0,3841
$S_{65,67,69,71,73,75}^{30}$	0,1150	0,1771	-0,0175	3,0113	-0,3021	-0,3643
$S_{65,67,69,71,73,75,77}^{30}$	0,1102	0,1684	-0,0192	3,0050	-0,2858	-0,3451
$S_{65,67,69,71,73,75,77,79}^{30}$	0,1066	0,1611	-0,0159	3,0072	-0,2687	-0,3276
$S_{65,67,69,71,73,75,77,79,81}^{30}$	0,1041	0,1556	-0,0194	3,0129	-0,2581	-0,3156
$S_{65,67,69,71,73,75,77,79,81,83}^{30}$	0,1021	0,1514	-0,0232	3,0132	-0,2479	-0,3069

Statistiques des surplus selon une couverture en swap de survie multicohorte

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,1862	0,2670	0,0213	2,9923	-0,4388	-0,5255
C_{65}^{30}	0,1787	0,2579	0,0748	2,9980	-0,4132	-0,4951
$C_{65,67}^{30}$	0,1727	0,2487	0,1340	3,0173	-0,3903	-0,4647
$C_{65,67,69}^{30}$	0,1683	0,2397	0,1964	3,0492	-0,3632	-0,4334
$C_{65,67,69,71}^{30}$	0,1668	0,2336	0,2371	3,0724	-0,3434	-0,4122
$C_{65,67,69,71,73}^{30}$	0,1661	0,2279	0,2769	3,0931	-0,3231	-0,3884
$C_{65,67,69,71,73,75}^{30}$	0,1666	0,2232	0,3103	3,1144	-0,3050	-0,3690
$C_{65,67,69,71,73,75,77}^{30}$	0,1677	0,2190	0,3414	3,1337	-0,2917	-0,3504
$C_{65,67,69,71,73,75,77,79}^{30}$	0,1694	0,2153	0,3691	3,1545	-0,2729	-0,3333
$C_{65,67,69,71,73,75,77,79,81}^{30}$	0,1714	0,2127	0,3867	3,1685	-0,2636	-0,3210
$C_{65,67,69,71,73,75,77,79,81,83}^{30}$	0,1734	0,2107	0,3989	3,1802	-0,2548	-0,3118

Statistiques des surplus selon une couverture en caps de survie multicohorte

Annexe 11 : Statistiques des surplus selon une couverture en mortalité unicolore avec le modèle M5 pour les femmes canadiennes

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.3151	0.3355	0.0409	2.9075	-0.4506	-0.5501
Avec forwards	0.1593	0.1897	-0.0925	2.8939	-0.2847	-0.3578
Avec puts	0.2190	0.2641	0.4574	3.2443	-0.3065	-0.3788

Statistiques des surplus selon une couverture du portefeuille avec trois instruments de couverture

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.3151	0.3355	0.0409	2.9075	-0.4506	-0.5501
Avec forwards	0.0415	0.0878	-0.0599	3.1135	-0.1788	-0.2153
Avec puts	0.1300	0.2035	1.1143	4.4741	-0.1921	-0.2272

Statistiques des surplus selon une couverture du portefeuille avec cinq instruments de couverture

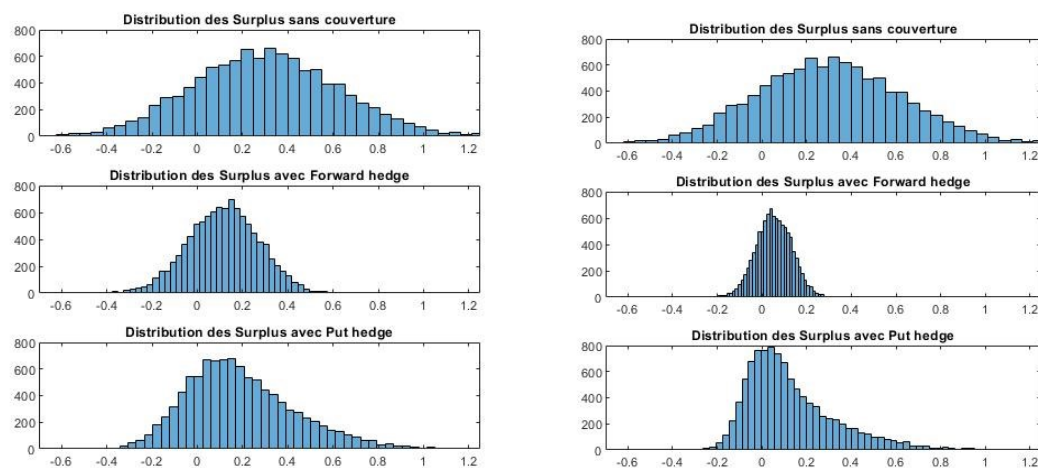
Annexe 12 : Statistiques selon une couverture en mortalité unicohorte avec le modèle Li-Lee pour les femmes canadiennes

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.3032	0.3219	0.0972	2.9746	-0.4152	-0.5192
Avec forward	0.1165	0.1546	-0.0745	2.9258	-0.2508	-0.3005
Avec put	0.1933	0.2424	0.6837	3.5713	-0.2572	-0.3109

Statistiques des surplus selon une couverture du portefeuille avec trois instruments de couverture

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.3032	0.3219	0.0972	2.9746	-0.4152	-0.5192
Avec forward	0.0542	0.0791	-0.0164	2.9856	-0.1296	-0.1598
Avec put	0.1304	0.2009	1.1932	4.6436	-0.1705	-0.2028

Statistiques des surplus selon une couverture du portefeuille avec cinq instruments de couverture



Surplus avec une protection en mortalité avec trois instruments de couverture (gauche)
et cinq instruments de couverture (droite)

Annexe 13 : Statistiques selon une couverture en mortalité multicohorte avec le modèle M5 pour les femmes canadiennes

Cohorte k	Age en 2017	n_k	Age et Année	Notionnel $w(j,k)$
1	68	1	(70, 2019)	18.8406
		2	(75, 2024)	17.4734
		3	(80, 2029)	12.7562
		4	(85, 2034)	8.1999
		5	(90, 2039)	4.3122
2	72	1	(75, 2020)	9.1303
		2	(80, 2025)	7.4284
		3	(85, 2030)	4.7394
		4	(90, 2035)	2.4503
3	76	1	(80, 2021)	6.5109
		2	(85, 2026)	4.3516
		3	(90, 2031)	2.2186
4	80	1	(85, 2022)	4.0928
		2	(90, 2027)	2.1088

Notionnel des q-forwards avec $x_{j,k}$ et $t_{j,k}$ comme âge et année de référence

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.1932	0.2902	0.0278	2.9589	-0.4744	-0.5677
F_1	0.1105	0.1933	-0.1041	2.9965	-0.3512	-0.4214
$F_{1,2}$	0.0746	0.1443	-0.2091	3.0647	-0.2848	-0.3395
$F_{1,2,3}$	0.0521	0.1102	-0.2637	3.1766	-0.2324	-0.2753
$F_{1,2,3,4}$	0.0396	0.0920	-0.2368	3.2123	-0.1953	-0.2335

Statistiques des surplus selon une couverture en forward de mortalité multicohorte

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.1932	0.2902	0.0278	2.9589	-0.4744	-0.5677
P_1	0.1436	0.2448	0.3380	3.1364	-0.3691	-0.4389
$P_{1,2}$	0.1229	0.2216	0.5458	3.3629	-0.3136	-0.3688
$P_{1,2,3}$	0.1102	0.2045	0.7270	3.6355	-0.2717	-0.3150
$P_{1,2,3,4}$	0.1034	0.1938	0.8492	3.8697	-0.2411	-0.2810

Statistiques des surplus selon une couverture en put de mortalité multicohorte

Annexe 14 : Statistiques selon une couverture en mortalité multicohorte avec le modèle Li-Lee pour les femmes canadiennes

Cohorte k	Age en 2017	n_k	Age et Année	Notionnel $w(j,k)$
1	68	1	(70, 2019)	18,4049
		2	(75, 2024)	16,9527
		3	(80, 2029)	12,1254
		4	(85, 2034)	7,5228
		5	(90, 2039)	3,7166
2	72	1	(75, 2020)	8,8743
		2	(80, 2025)	7,1535
		3	(85, 2030)	4,38
		4	(90, 2035)	2,1454
3	76	1	(80, 2021)	6,2621
		2	(85, 2026)	4,0614
		3	(90, 2031)	1,9524
4	80	1	(85, 2022)	3,8168
		2	(90, 2027)	1,8697

Notionnel des q-forwards avec $x_{j,k}$ et $t_{j,k}$ comme âge et année de référence

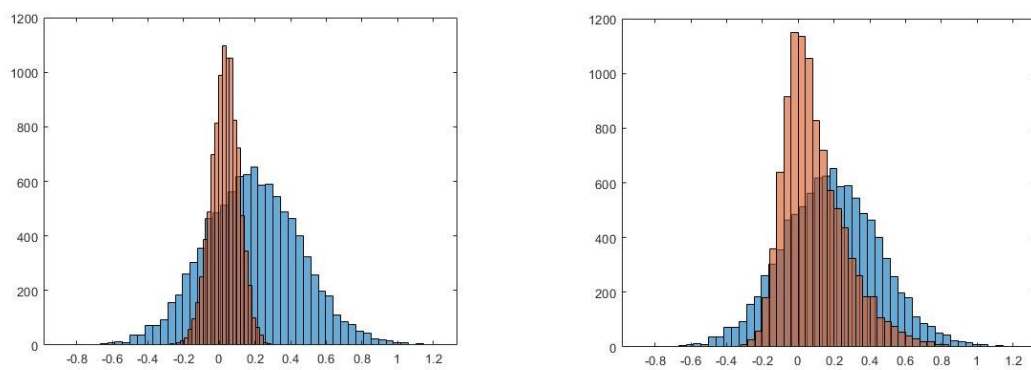
Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,1854	0,2680	0,0552	3,0547	-0,4282	-0,5188
F_1	0,1021	0,1702	-0,0886	3,0685	-0,3068	-0,3691
$F_{1,2}$	0,0665	0,1233	-0,1790	3,1113	-0,2410	-0,2872
$F_{1,2,3}$	0,0445	0,0931	-0,2126	3,1412	-0,1885	-0,2273
$F_{1,2,3,4}$	0,0324	0,0781	-0,1578	3,1221	-0,1582	-0,1912

Statistiques des surplus selon une couverture en forward de mortalité multicohorte

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,1854	0,2680	0,0552	3,0547	-0,4282	-0,5188
P_1	0,1351	0,2224	0,4294	3,3290	-0,3229	-0,3856
$P_{1,2}$	0,1142	0,2001	0,6780	3,6612	-0,2674	-0,3141

$P_{1,2,3}$	0,1015	0,1848	0,8808	4,0329	-0,2227	-0,2630
$P_{1,2,3,4}$	0,0947	0,1756	1,0143	4,3359	-0,1981	-0,2318

Statistiques des surplus selon une couverture en put de mortalité multicohorte



Surplus avec une protection de quatorze Q-forwards (à gauche) et quatorze Q-puts (à droite)

Annexe 15 : Statistiques selon une couverture en kappa unicohorte avec le modèle M5 pour les femmes canadiennes

	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5
Année clé	2021	2026	2031	2036	2041
$KKD(F(q), j)$	-0.7903	-0.6496	-0.5339	-0.4388	-0.3607
$KKD(L(K1), j)$	-0.5176	-0.5463	-0.5267	-0.4334	-0.2730
$KKD(L(K2), j)$	5.1197	2.7146	0.0215	-2.1144	-2.6722
w_j K1	0.6549	0.8411	0.9865	0.9876	0.7570
w_j K2	-6.4780	-4.1790	-0.0403	4.8183	7.4085

Key k-durations et le notionnel requis w_j pour le $j^{\text{ème}}$ K-Forward en uncohort avec Li-Lee

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.3089	0.3380	0.0085	3.0076	-0.4746	-0.5984
K1-Forward	0.1644	0.1999	0.0037	3.0241	-0.3035	-0.3750
K1-Put	0.2144	0.2695	0.4951	3.2644	-0.3245	-0.3951
K2-Forward	0.3093	0.3368	0.0030	3.0212	-0.4789	-0.6045
K2-Put	0.3092	0.3372	0.0054	3.0140	-0.4760	-0.6010
K1-Forwards et K2-Forwards	0.1648	0.1994	-0.0101	3.0385	-0.3109	-0.3864
K1-Puts et K2-Puts	0.2148	0.2688	0.4921	3.2679	-0.3266	-0.4003

Statistiques des surplus selon une couverture en kappa du portefeuille avec trois instruments de couverture

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.3089	0.3380	0.0085	3.0076	-0.4746	-0.5984
K1-Forward	0.0532	0.1020	0.0247	3.0059	-0.1853	-0.2161
K1-Put	0.1401	0.2223	1.0334	4.0794	-0.2127	-0.2453
K2-Forward	0.3066	0.3359	0.0109	3.0136	-0.4754	-0.5942
K2-Put	0.3078	0.3365	0.0092	3.0117	-0.4770	-0.5956
K1-Forwards et K2-Forwards	0.0508	0.0969	0.0269	3.0429	-0.1786	-0.2099
K1-Puts et K2-Puts	0.1390	0.2209	1.0549	4.1185	-0.2098	-0.2404

Statistiques des surplus selon une couverture en kappa du portefeuille avec cinq instruments de couverture

Annexe 16 : Statistiques selon une couverture en kappa unicohorte avec le modèle Li-Lee pour les femmes canadiennes

	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5
Année clé	2021	2026	2031	2036	2041
$KKD(F(q), j)$	-0.7903	-0.6496	-0.5339	-0.4388	-0.3607
$KKD(L(K1), j)$	-0.5352	-0.5675	-0.5466	-0.4366	-0.2618
$KKD(L(K2), j)$	5.2707	2.8148	0.0260	-2.1274	-2.5483
w_j K1	0.6772	0.8736	1.0238	0.9949	0.7258
w_j K2	-6.6691	-4.3333	-0.0486	4.8479	7.0651

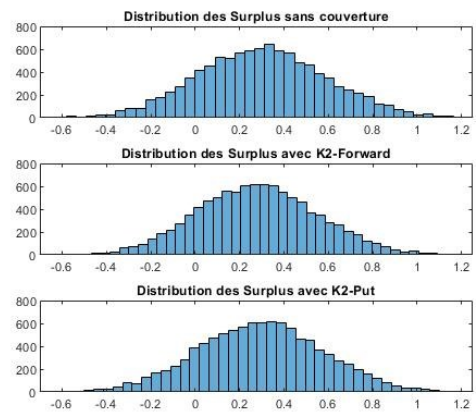
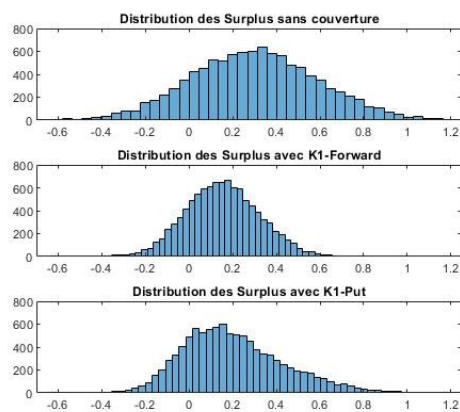
Key k-durations et le notionnel requis w_j pour le $j^{\text{ème}}$ K-Forward en unicohorte avec Li-Lee

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,2994	0,3186	0,0750	2,9902	-0,4198	-0,5227
K1-Forward	0,1398	0,1722	0,0973	3,0009	-0,2477	-0,3058
K1-Put	0,1947	0,2465	0,6338	3,4388	-0,2668	-0,3251
K2-Forward	0,2858	0,3053	0,0768	2,9915	-0,4003	-0,5006
K2-Put	0,2943	0,3118	0,0448	2,9894	-0,4164	-0,5194
K1-Forwards et K2-Forwards	0,1263	0,1616	0,0898	3,0054	-0,2451	-0,2946
K1-Puts et K2-Puts	0,1895	0,2398	0,6087	3,4104	-0,2636	-0,3227

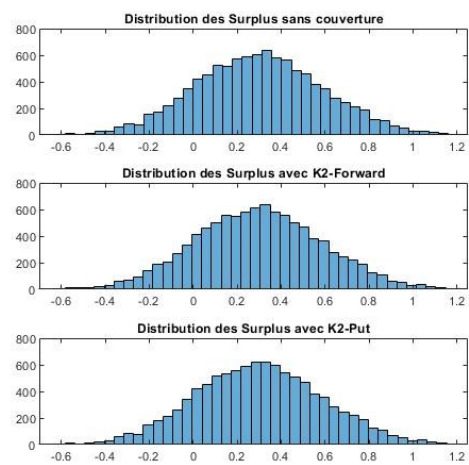
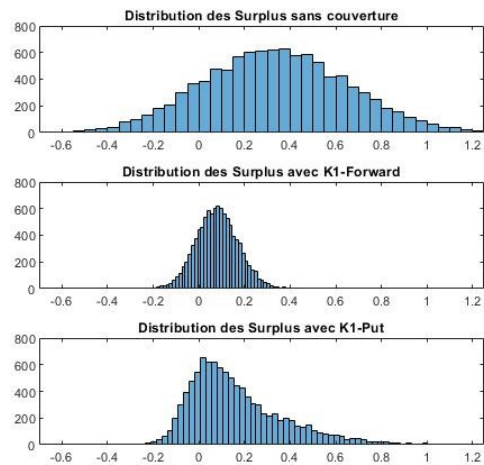
Statistiques des surplus selon une couverture en kappa du portefeuille avec trois instruments de couverture

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,2994	0,3186	0,0750	2,9902	-0,4198	-0,5227
K1-Forward	0,0438	0,0914	0,1142	3,0494	-0,1630	-0,1929
K1-Put	0,1313	0,2074	1,1039	4,3318	-0,1909	-0,2214
K2-Forward	0,3014	0,3209	0,0708	2,9883	-0,4213	-0,5291
K2-Put	0,2999	0,3197	0,0843	2,9895	-0,4193	-0,5223
K1-Forwards et K2-Forwards	0,0458	0,0926	0,0875	3,0074	-0,1683	-0,1953
K1-Puts et K2-Puts	0,1318	0,2087	1,1104	4,3441	-0,1904	-0,2217

Statistiques des surplus selon une couverture en kappa du portefeuille avec cinq instruments de couverture



Surplus avec une protection en Kappa (trois instruments)



Surplus avec une protection en Kappa (cinq instruments)

Annexe 17 : Statistiques selon une couverture en kappa multicohorte avec le modèle M5 pour les femmes canadiennes

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.1945	0.2917	0.0222	2.9285	-0.4847	-0.5726
F_{2022}	0.1574	0.2359	0.0053	2.8926	-0.3900	-0.4608
$F_{2022,2027}$	0.1082	0.1650	-0.0254	2.8878	-0.2812	-0.3257
$F_{2022,2027,2032}$	0.0643	0.1086	-0.0447	2.9336	-0.1913	-0.2263
$F_{2022,2027,2032,2037}$	0.0343	0.0865	-0.0139	2.9997	-0.1683	-0.1978

Statistiques des surplus selon une couverture en forward de kappa multicohorte

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0.1945	0.2917	0.0222	2.9285	-0.4847	-0.5726
P_{2022}	0.1726	0.2638	0.1940	2.9725	-0.4054	-0.4769
$P_{2022,2027}$	0.1427	0.2286	0.5061	3.2299	-0.3124	-0.3580
$P_{2022,2027,2032}$	0.1157	0.1993	0.8391	3.7457	-0.2329	-0.2680
$P_{2022,2027,2032,2037}$	0.0974	0.1817	1.0431	4.2506	-0.2021	-0.2319

Statistiques des surplus selon une couverture en put de kappa multicohorte

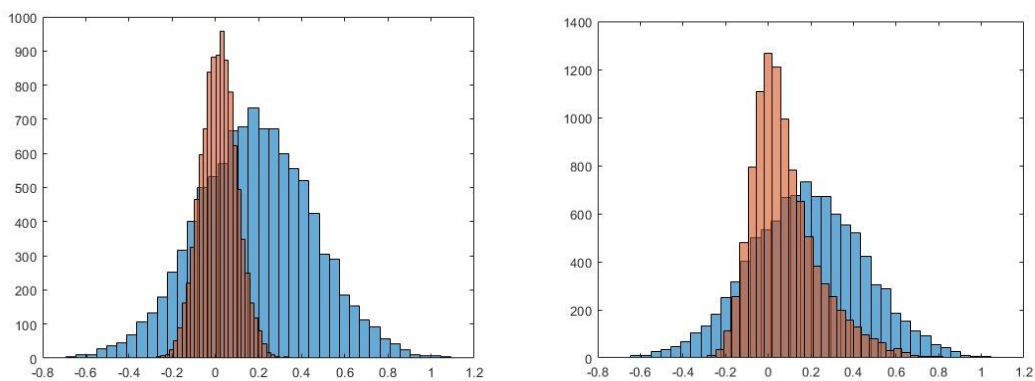
Annexe 18 : Statistiques selon une couverture en kappa multicohorte avec le modèle Li-Lee pour les femmes canadiennes

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,1833	0,2668	-0,0195	3,0462	-0,4487	-0,5434
F_{2022}	0,1406	0,2070	-0,0105	3,0759	-0,3506	-0,4184
$F_{2022,2027}$	0,0879	0,1361	-0,0179	3,0944	-0,2369	-0,2811
$F_{2022,2027,2032}$	0,0439	0,0891	-0,0072	3,1036	-0,1655	-0,1990
$F_{2022,2027,2032,2037}$	0,0164	0,0831	0,0219	3,0075	-0,1735	-0,2024

Statistiques des surplus selon une couverture en forward de kappa multicohorte

Portefeuille	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	VaR99	ES99
Sans couverture	0,1833	0,2668	-0,0195	3,0462	-0,4487	-0,5434
P_{2022}	0,1575	0,2361	0,2025	3,0826	-0,3658	-0,4342
$P_{2022,2027}$	0,1250	0,2003	0,5783	3,4065	-0,2662	-0,3125
$P_{2022,2027,2032}$	0,0976	0,1731	0,9243	4,0352	-0,2052	-0,2370
$P_{2022,2027,2032,2037}$	0,0808	0,1589	1,0744	4,5060	-0,1863	-0,2154

Statistiques des surplus selon une couverture en put de kappa multicohorte



Surplus avec une protection de quatre K1-forwards (à gauche) et quatre K1-puts (à droite)

Annexe 19 : Pourcentage de réduction de risque provenant de portefeuilles couverts en multicohorte

Cohortes		68 ans en 2017	68 et 72 ans en 2017	68, 72 et 76 ans en 2017	68, 72, 76 et 80 ans en 2017
Li-Lee	Q-Forwards	28.86 %	44.64 %	56.19 %	63.15 %
	Q-Puts	25.67 %	39.46 %	49.31 %	55.32 %
CBD (M5)	Q-Forwards	25.77 %	40.20 %	51.51 %	58.87 %
	Q-Puts	22.69 %	35.04 %	44.51 %	50.50 %
CBD (M7)	Q-Forwards	25.57 %	40.25 %	52.04 %	59.17 %
	Q-Puts	22.61 %	35.35 %	45.35 %	51.58 %

Pourcentage de réduction de risque provenant de portefeuilles multicohortes couverts en mortalité avec différents nombres d'instruments financiers

Année		2022	2022-2027	2022-2027- 2032	2022-2027- 2032-2037
Li-Lee	K1-Forwards	23.00 %	48.27 %	63.38 %	62.75 %
	K1-Puts	20.10 %	42.49 %	56.39 %	60.36 %
CBD (M5)	K1-Forwards	19.52 %	43.12 %	60.48 %	65.46 %
	K1-Puts	16.71 %	37.48 %	53.20 %	59.50 %
CBD (M7)	K1-Forwards	19.28 %	43.33 %	61.22 %	66.96 %
	K1-Puts	16.47 %	37.62 %	53.39 %	59.68 %

Pourcentage de réduction de risque provenant de portefeuilles multicohortes couverts en K1 avec différents nombres d'instruments financiers